Lehrstuhl A für Mathematik
Prof. Dr. E. Görlich
Dipl.-Math. Thorsten Heck

Aachen, den 9.1.2001

5. Übung „Topologische Vektorräume“

(Abgabe: 23.1.2001 vor der Vorlesung)

Aufgabe 1: Sei E ein topologischer Vektorraum und $f \in E^*$, $f \neq 0$.
Zeigen Sie: Für alle offenen Mengen $A \subset E$ gilt: $f(A)$ ist offen. (Lemma II.10) $\boxed{3}$

Aufgabe 2: Sei E ein lokalkonvexer Raum, $B \subset E$ konvex und $a \notin \overline{B}$. Zeigen Sie:

a) Es existiert ein $f \in E'$ mit $f(a) \notin \overline{f(B)}$ (Folgerung II.5).

b) Ist B zusätzlich kreisförmig, so existiert ein $f \in E'$ mit $|f(x)| \leq 1$ für alle $x \in B$ und $f(a) > 1$ (Folgerung II.6). $\boxed{7}$

Aufgabe 3: Sei E ein lokalkonvexer Raum über $\mathbb{R}$; $A, B \subset E$ konvex und disjunkt, A offen. Zeigen Sie:
Es existiert ein $f \in E'$ und ein $\alpha \in \mathbb{R}$ mit $f(x) > \alpha$ für alle $x \in A$ und $f(x) \leq \alpha$ für alle $x \in B$ (Folgerung II.7). $\boxed{2}$

Aufgabe 4: Sei E ein lokalkonvexer Raum über $\mathbb{R}$, f ein lineares Funktional auf einem Teilraum M und A eine nichtleere offene konvexe Menge mit $M \cap A \notin \emptyset$, so dass $f(x) > 0$ für alle $x \in M \cap A$. Zeigen Sie:
Es existiert ein lineares Funktional f_1 auf E für das gilt:

i) $f_1(x) = f(x) \qquad \forall\, x \in M,$

ii) $f_1(x) > 0 \qquad \forall x \in A$

(Lemma II.11). $\boxed{5}$

Aufgabe 5: Sei (F, G) ein Dualsystem und $\sigma(F, G)$ die schwache Topologie für F. Zeigen Sie:
Eine Folge $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset F$ konvergiert gegen x im Sinne der schwachen Topologie genau dann, wenn

$$\lim_{n\to\infty} \langle x_n, y\rangle = \langle x, y\rangle \quad \forall\, y \in G.$$ $\boxed{6}$

Aufgabe 6: Zeigen Sie die Umkehrung von Lemma II.14:
Seien $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ zwei Topologien für einen Vektorraum E, so dass $(E, \mathcal{T}_1)$ und $(E, \mathcal{T}_2)$ topologische Vektorräume sind. Ferner gelte für konvexe Mengen A: A ist genau dann abgeschlossen bezüglich $\mathcal{T}_1$, wenn sie es bezüglich $\mathcal{T}_2$ ist.
Dann gilt:

$$(E, \mathcal{T}_1)' = (E, \mathcal{T}_2)'.$$

$\boxed{2}$

Aufgabe 7: Sei (F, G) ein Dualsystem und $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ zwei kompatible Topologien. Zeigen Sie:

a) Ist eine Menge $A \subset F$ dicht in $(F, \mathcal{T}_1)$, so folgt i. A. nicht, dass A dicht in $(F, \mathcal{T}_2)$ ist.

b) Ist $(F, \mathcal{T}_1)$ separabel, d. h., es existiert eine abzählbare dichte Teilmenge von F, so ist auch $(F, \mathcal{T}_2)$ separabel. $\boxed{9}$

Definition: *Sei F ein Vektorraum und M_i $(1 \leq i \leq n)$ Vektorräume, für die $M_i \cap \left(\sum_{j \neq i} M_j\right) = \{0\}$ gilt. Dann heißt*

$$E := \operatorname{span}\left\{x;\, x \in \bigcup_{i=1}^{n} M_i\right\}$$

die <u>algebraische direkte Summe</u> der M_i.

Bemerkung: *Für jedes $x \in E$ existiert dann eine eindeutige Darstellung $x = \sum_{i=1}^{n} x_i$, $x_i \in M_i$, und die Projektion $\pi_i : E \to M_i : \sum_{i=1}^{n} x_i \mapsto x_i$ ist wohldefiniert und linear.*

Definition: *Sei $\mathcal{T}$ eine Topologie, so dass $(E, \mathcal{T})$ ein topologischer Vektorraum ist. Falls die Abbildung $\psi : \prod_{i=1}^{n} M_i \to E : (x_1, \ldots, x_n) \mapsto \sum_{i=1}^{n} x_i$ ein Isomorphismus ist (d. h. bijektiv und ψ, ψ^{-1} linear, stetig), so heißt E die <u>(topologische) direkte Summe</u> von $\{M_i;\, 1 \leq i \leq n\}$.*
Schreibweise: $E = M_1 \oplus \cdots \oplus M_n$.

Aufgabe 8: Sei $(E, \mathcal{T})$ ein topologischer Vektorraum, und $\{M_i;\, 1 \leq i \leq n\}$ derart, dass E die algebraische direkte Summe der M_i ist. Zeigen Sie:

a) Die Projektionen π_i sind offene Abbildungen, d. h., Bilder offener Mengen sind offen.

b) E ist topologische direkte Summe genau dann, wenn alle Projektionen π_i stetig sind. $\boxed{5}$

Definition: *Sei $(E, \mathcal{T})$ ein topologischer Vektorraum und M ein Vektorraum. Der <u>Quotientenraum</u> ist definiert als $E/M := \{x + M;\, x \in E\}$.*

Bemerkung: *Definiert man die Topologie $\widetilde{\mathcal{T}}$ auf E/M als die feinste Topologie, für die die Abbildung $\varphi : E \to E/M : x \mapsto x + M$ stetig ist, so ist $(E/M, \widetilde{\mathcal{T}})$ ein topologischer Vektoraum (siehe Schaefer, pp. 14,20). $\widetilde{\mathcal{T}}$ heißt die Quotiententopologie.*

Aufgabe 9: Sei E ein topologischer Vektorraum und M, N Unterräume. Zeigen Sie:

a) E/M ist Hausdorffraum genau dann, wenn M abgeschlossen in E ist.

b) Falls E die algebraische Summe von M und N ist, so gilt:
$E = M \oplus N$ genau dann, wenn die Abbildung $\nu : E/M \to N : x + M \mapsto y$, mit $y \in N$ und $(y - x) \in M$ ein Isomorphismus ist. $\boxed{6}$

Aufgabe 10:

a) Sei E ein n-dimensionaler Hausdorffraum über dem Körper $\mathbb{K}$. Zeigen Sie, dass E isomorph zu $\mathbb{K}^n$ ist.

b) Geben Sie ein Gegenbeispiel für einen topologischen Vektorraum der Dimension n an, welcher nicht isomorph zu $\mathbb{K}^n$ ist. $\boxed{7}$

Aufgabe 11: Sei E ein lokalkonvexer Hausdorffraum und x_i, $1 \leq i \leq n$ linear unabhängig in E. Zeigen Sie:
Es existieren n Funktionale $f_j \in E'$, $1 \leq j \leq n$ für die gilt:

$$f_j(x_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}; \ 1 \leq i, j \leq n.$$

(Hinweis: Man verwende Aufgabe 10) $\boxed{3}$