Lehrstuhl A für Mathematik Aachen, den 12.12.2000
Prof. Dr. E. Görlich
Dipl.-Math. Thorsten Heck

4. Übung „Topologische Vektorräume“

(Abgabe: 9.1.2001 vor der Vorlesung)

Im Folgenden sei $\mathcal{D}(K)$ für eine kompakte Teilmenge $K \subset \mathbb{R}^n$ definiert wie in Beispiel 2 zu Satz 4 am Ende von Kapitel 1 der Vorlesung. Es sei $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) := \bigcup \mathcal{D}(K)$, wobei die Vereinigung über alle kompakten Teilmengen K des $\mathbb{R}^n$ zu bilden ist.

Aufgabe 1: Es sei $\mathcal{B}$ die Familie aller Teilmengen $V \subset \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ mit den folgenden Eigenschaften:

a) Jedes $V \in \mathcal{B}$ ist absolut konvex und absorbierend.

b) Für jede kompakte Teilmenge K von $\mathbb{R}^n$ und jedes $V \in \mathcal{B}$ ist $V \cap \mathcal{D}(K)$ eine Umgebung in $\mathcal{D}(K)$.

Zeigen Sie: Es gibt genau eine Vektorraumtopologie $\mathcal{T}$ auf $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, für welche $\mathcal{B}$ eine Nullumgebungsbasis bildet, und $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ versehen mit dieser Topologie ist ein lokal konvexer Raum.
Hinweis: Übung 2, Aufgabe 7. $\boxed{6}$

Aufgabe 2: Sei $(\varphi_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ eine Folge aus $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, wobei bis auf weiteres $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ mit der lokal konvexen Topologie aus Aufgabe 1 versehen sei. Zeigen Sie:

a) $(\varphi_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ konvergiert genau dann gegen $0 \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, wenn gilt:

  (i) es gibt ein Kompaktum $K \subset \mathbb{R}^n$ so, dass $\operatorname{supp}\varphi_\nu \subset K$ für alle $\nu \in \mathbb{N}$,

  (ii) für alle Multiindizes $\kappa \in \mathbb{N}_0^n$ konvergiert $D^\kappa\varphi_\nu$ gleichmäßig gegen 0 auf K. $\boxed{8}$

b) $(\varphi_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ konvergiert genau dann gegen $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, wenn gilt:

  (i) es gibt ein Kompaktum $K \subset \mathbb{R}^n$ so, dass $\operatorname{supp}\varphi, \operatorname{supp}\varphi_\nu \subset K$ für alle $\nu \in \mathbb{N}$,

  (ii) für alle $\kappa \in \mathbb{N}_0^n$ konvergiert $D^\kappa\varphi_\nu$ gleichmäßig gegen $D^\kappa\varphi$ auf K. $\boxed{2}$

Definition: *Ein System $\mathcal{H}$ von Halbnormen auf einem Vektorraum E heißt* filtrierend, *wenn für je zwei Halbnormen $p_1, p_2 \in \mathcal{H}$ positive Zahlen a_1, a_2 und eine Halbnorm $p \in \mathcal{H}$ existieren, so dass für alle $x \in E$ gilt: $a_ip_i(x) \le p(x)$ für $i = 1, 2$.*

Aufgabe 3: Zeigen Sie:

a) Für jede kompakte Teilmenge $K \subset \mathbb{R}^n$ und jedes $m \in \mathbb{N}_0$ wird durch

$$p_{K,m}(\varphi) := \max_{|\kappa| \leq m} \max_{x \in K} |D^\kappa \varphi(x)|, \ \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n),$$

eine Halbnorm auf $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ definiert. $\boxed{1}$

b) Die Familie $\mathcal{H} := \{p_{K,m} | K \subset \mathbb{R}^n \text{ kompakt }, m \in \mathbb{N}_0\}$ ist filtrierend und total. $\boxed{2}$

c) Sei $\mathcal{T}_\mathcal{H}$ die von der Familie $\mathcal{H}$ erzeugte lokal konvexe Topologie auf $C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Zeigen Sie, daß der lokal konvexe Raum $(C^\infty(\mathbb{R}^n), \mathcal{T}_\mathcal{H})$ metrisierbar ist und geben Sie eine Metrik ρ an, die $\mathcal{T}_\mathcal{H}$ erzeugt. Der Raum $(C^\infty(\mathbb{R}^n), \mathcal{T}_\mathcal{H})$ wird im folgenden kurz mit $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ bezeichnet. $\boxed{4}$

d) Eine Folge $(\varphi_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ aus $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ konvergiert genau dann gegen $\varphi \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$, wenn für jeden Multiindex $\kappa \in \mathbb{N}_0^n$ die Folge $(D^\kappa \varphi_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ auf jedem Kompaktum $K \subset \mathbb{R}^n$ gleichmäßig gegen $D^\kappa \varphi$ konvergiert. $\boxed{2}$

Aufgabe 4: Zeigen Sie:

a) Sei $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ und $(\varphi_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ eine Folge aus $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$. Dann impliziert $\lim\limits_{\nu \to \infty} \varphi_\nu = \varphi$ in $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ stets $\lim\limits_{\nu \to \infty} \varphi_\nu = \varphi$ in $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$. $\boxed{4}$

b) Sei $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ und für $\nu \in \mathbb{N}$

$$\varphi_\nu(x) := \frac{1}{\nu} \varphi(\frac{x}{\nu}), \ x \in \mathbb{R}^n.$$

Dann gilt $(\varphi_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ und $\lim\limits_{\nu \to \infty} \varphi_\nu = 0$ in $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$, aber nicht in $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Insbesondere ist die Topologie von $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ nicht gleich der von $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ auf $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ erzeugten Relativtopologie. $\boxed{2}$

Definition: *Sei $n \in \mathbb{N}$ und $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ eine Lebesgue-meßbare Funktion.*
f heißt ***lokal integrierbar****, falls f über jeder kompakten Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ integrierbar ist. Mit $L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ wird im Folgenden der lineare Raum der auf $\mathbb{R}^n$ lokal integrablen Funktionen bezeichnet.*

Aufgabe 5: Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ lokal-integrierbar und $T_f : \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}$ definiert durch $T_f(\varphi) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x)\,dx$ für alle $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Zeigen Sie: $T_f \in (\mathcal{D}(\mathbb{R}^n))'$.
Bemerkung: die stetigen lineare Funktionale auf $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, also die Elemente aus $(\mathcal{D}(\mathbb{R}^n))'$ werden **Distributionen** genannt. Eine Distribution T heißt **regulär**, falls ein $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ existiert mit $T = T_f$, anderenfalls heißt T **singulär**. $\boxed{4}$

Aufgabe 6: Sei $x_0 \in \mathbb{R}^n$ und $\delta : \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}$ definiert durch $\delta(\varphi) := \varphi(x_0)$ für alle $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Zeigen Sie, daß δ eine singuläre Distribution ist (sogenanntes Diracsches Delta-Funktional). $\boxed{4}$

Aufgabe 7: Der Raum $\mathcal{D}(\Omega)$ sei definiert wie in der Vorlesung, Kap. I, Beisp. 5 (Ende Kapitel I), mit dem Konvergenzbegriff „in $\mathcal{D}(\Omega)$“.

a) Konstruieren Sie eine Folge von Halbnormen $\{p_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ auf $\mathcal{D}(\Omega)$ mit der Eigenschaft:

   Eine Folge $\{f_n\}$ konvergiert in $\mathcal{D}(\Omega)$ genau dann gegen ein $f \in \mathcal{D}(\Omega)$, wenn es zu jedem Paar $\varepsilon > 0$, $m \in \mathbb{N}$ ein $n_0 = n_0(\varepsilon, m)$ gibt, so dass gilt: $f_n - f \in \mathcal{U}_{\varepsilon,m}$ $\forall n \geq n_0$. Dabei ist
$$\mathcal{U}_{\varepsilon,m} := \{f \in \mathcal{D}(\Omega)\,;\, p_k(f) \leq \varepsilon \;\forall 1 \leq k \leq m\}.$$

b) Zeigen Sie, daß $\mathcal{D}(\Omega)$ unter der von den p_k erzeugten Topologie ein metrisierbarer lokalkonvexer Raum ist und dass die $\mathcal{U}_{\varepsilon,m}$ dort eine Nullumgebungsbasis bilden. (auch zu zeigen: Die p_k sind Halbnormen; die Folge $\{p_k\}$ ist total.)

$\boxed{6}$

Aufgabe 8: Zeigen Sie, dass auf $L^p(0,1), 0 < p < 1$, kein nicht-triviales stetiges lineares Funktional existiert.

Hinweis: H.H.Schaefer, Topological Vector spaces, 1971, S.34. $\boxed{5}$

Aufgabe 9: Zeigen Sie, dass in einem topologischen Vektorraum E genau dann nicht-triviale stetige lineare Funktionale existieren, wenn es eine konvexe Nullumgebung $U \neq E$ gibt.

Hinweis: Zeigen Sie für die Rückrichtung, dass Lemma I.14,i) auch unter der Voraussetzung „E ein topologischer Vektorraum“ gültig bleibt, und beweisen Sie folgende Version des Satzes von Hahn-Banach:
Sei E ein topologischer Vektorraum, $a \in E$ und p eine stetige Halbnorm auf E. Dann existiert ein lineares stetiges Funktional $f \in E'$ mit

$$|f(x)| \leq p(x) \quad \forall x \in E \quad \text{und} \quad f(a) = p(a).$$

$\boxed{7}$