Lehrstuhl A für Mathematik
Prof. Dr. E. Görlich
Dipl.-Math. Thorsten Heck

Aachen, den 28.11.2000

3. Übung „Topologische Vektorräume“

(Abgabe: 12.12.2000 vor der Vorlesung)

Definition: *Eine Abbildung $\|\cdot\|$ von einem Vektorraum E in $\mathbb{R}$ heißt* <u>*Quasi-Norm*</u>*, falls gilt:*

Q_1) $\|x\| \geq 0$ *und* $\|x\| = 0 \Longleftrightarrow x = 0 \qquad \forall x \in E$,

Q_2) $\|\alpha x\| = |\alpha| \, \|x\| \qquad \forall \alpha \in \mathbb{K},\ x \in E$,

Q_3) $\exists\, k \geq 1$ *so dass* $\|x+y\| \leq k(\|x\| + \|y\|)$.

E heißt dann <u>*quasi-normiert*</u>*.*

Definition: *Eine Teilmenge B eines topologischen Vektorraumes E heißt* <u>*beschränkt*</u>*, falls für jede Nullumgebung U ein $\varrho > 0$ existiert mit $B \subset \varrho U$.*
Weiter heißt E <u>*lokalbeschränkt*</u>*, falls er eine beschränkte Nullumgebung besitzt.*

Aufgabe 1: Zeigen Sie, dass ein topologischer Vektorraum genau dann quasi-normierbar ist, wenn er ein lokalbeschränkter Hausdorffraum ist. $\boxed{8}$

Bemerkung: *Es gilt folgende Variante für* <u>*lokalkonvexe*</u> *Räume:*
Ein lokalkonvexer Raum ist genau dann normierbar, wenn er ein lokalbeschränkter Hausdorffraum ist.

Definition: *Eine Teilmenge A eines Vektorraumes E heißt* <u>*p-konvex*</u>*, $0 < p \leq 1$, falls für bel. $x, y \in A$, $\lambda, \mu \geq 0$ mit $\lambda^p + \mu^p = 1$ gilt: $\lambda x + \mu y \in A$.*

Definition: *Eine Abbildung $|||\cdot|||$ von einem Vektorraum E in $\mathbb{R}$ heißt eine* <u>*p-Norm*</u>*, $0 < p \leq 1$, falls gilt:*

P_1) $|||x||| \geq 0$ *und* $|||x||| = 0 \Longleftrightarrow x = 0 \qquad \forall x \in E$,

P_2) $|||\alpha x||| = |\alpha|^p |||x||| \qquad \forall \alpha \in \mathbb{K}, x \in E$,

P_3) $|||x+y||| \leq |||x||| + |||y||| \qquad \forall x, y \in E$.

Aufgabe 2: Sei E ein Hausdorffscher topologischer Vektorraum. Zeigen Sie, dass die Topologie des Raumes E genau dann durch eine p-Norm gegeben werden kann, wenn E eine p-konvexe beschränkte Nullumgebung besitzt.
Hinweis: Für die Rückrichtung verwende man Bemerkung 1. $\boxed{6}$

Aufgabe 3: Beweisen Sie Lemma I.15:
Sei $\mathcal{Q}$ eine Familie von Halbnormen auf einem Vektorraum E und $\mathcal{T}_{\mathcal{Q}}$ die von $\mathcal{Q}$ erzeugte Topologie. Folgende Aussagen sind äquivalent:

a) $(E, \mathcal{T}_{\mathcal{Q}})$ ist Hausdorffraum,

b) Zu jedem $x \in E, x \neq 0$ existiert ein $p \in \mathcal{Q}$ mit $p(x) > 0$,

c) $\mathcal{Q}$ ist total.

$\boxed{4}$

Aufgabe 4: Sei (s) der Raum aller Zahlenfolgen $x = \{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ und d die Metrik

$$d(x,y) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{|x_k - y_k|}{1 + |x_k - y_k|} \quad \forall x, y \in (s)$$

a) Zeigen Sie, dass $\mathcal{U} := \{\{x \in (s)\,;\, \max_{k \in \mathcal{J}} |x_k| < \varepsilon\}\,;\, \varepsilon > 0,\, \mathcal{J} \subset \mathbb{N} \text{ endlich}\}$ eine Nullumgebungsbasis ist.

b) Zeigen Sie mittels Bemerkung 1, dass für (s) keine Norm existiert, die die gleiche Topologie $\mathcal{T}_d$ erzeugt wie d.

c) Beweisen Sie direkt, dass $((s), \mathcal{T}_d)$ nicht normierbar ist.

$\boxed{9}$

Aufgabe 5: (siehe Bem. nach Lemma II.1) Seien E, F lokalkonvexe Räume über $\mathbb{K}$, deren Topologien durch Familien $\mathcal{Q}_E$ und $\mathcal{Q}_F$ von Halbnormen bestimmt sind. Weiter sei $f : E \to F$ eine lineare Abbildung. Zeigen Sie die Äquivalenz folgender Aussagen:

a) f ist stetig auf E,

b) Zu jeder beliebigen stetigen Halbnorm q auf F existiert eine stetige Halbnorm p auf E mit
$$q(f(x)) \leq p(x) \quad \forall x \in E,$$

c) Zu jeder beliebigen Halbnorm $q \in \mathcal{Q}_F$ existieren ein $M > 0$ und Halbnormen $p_1, \ldots, p_n \in \mathcal{Q}_E$ mit
$$q(f(x)) \leq M \sum_{k=1}^{n} p_k(x) \quad \forall x \in E.$$

$\boxed{7}$

Definition: *Sei E ein Vektorraum und $\mathcal{Q}$ eine Familie von Halbnormen auf E. $\mathcal{Q}$ heißt saturiert, falls für beliebige $p_1, \ldots, p_n \in \mathcal{Q}$ auch $\max_{1 \leq k \leq n} p_k(x)$ eine Halbnorm aus $\mathcal{Q}$ ist.*

Aufgabe 6:

a) Zeigen Sie, dass sich jede lokalkonvexe Topologie durch eine saturierte Familie von Halbnormen erzeugen läßt.

b) Wie wirkt es sich auf das Stetigkeitskriterium in Aufgabe 5 aus, wenn $\mathcal{Q}$ saturiert ist?

$\boxed{6}$

Aufgabe 7: Sei I eine überabzählbare Menge und $S(I)$ der Vektorraum aller reellwertigen Funktionen f auf I. Durch die Familie von Halbnormen

$$\{p_t(f) := |f(t)|\,;\ t \in I\}$$

sei eine lokalkonvexe Topologie auf $S(I)$ erzeugt. Zeigen Sie, dass es keine Metrik gibt, die diese Topologie erzeugt.

Hinweis: Benutzen Sie die Nullumgebungsbasis aus Satz I. 3. $\boxed{5}$