Lehrstuhl A für Mathematik
Prof. Dr. E. Görlich
Dipl.-Math. Thorsten Heck

Aachen, den 14.11.2000

2. Übung „Topologische Vektorräume“

(Abgabe: 28.11.2000 vor der Vorlesung)

Aufgabe 1: Geben Sie ein Beispiel an für einen topologischen Vektorraum E und eine Menge $A \subset E$, die kreisförmig aber nicht Nullumgebung ist. $\boxed{2}$

Definition: *Sei E ein Vektorraum über einem Körper $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}\}$. Eine Teilmenge $A \subset E$ heißt ausgeglichen, falls zu jedem $x \in E$ ein $\lambda > 0$ existiert, so daß $x \in \lambda A$.*

Aufgabe 2: Zeigen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen

a) A absorbierend $\Longrightarrow$ A ausgeglichen,

b) A ausgeglichen $\Longrightarrow$ A absorbierend. $\boxed{2}$

Aufgabe 3: Sei E ein topologischer Vektorraum über $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$; $A \subset E$. Zeigen Sie:

a) Ist A konvex, kreisförmig, absolut konvex oder absorbierend, so besitzt die Abschließung $\overline{A}$ von A jeweils dieselbe Eigenschaft. $\boxed{5}$

b) Ist A konvex, so auch ihr Inneres $\mathrm{int}A$. $\boxed{1}$

c) Falls zusätzlich $0 \in \mathrm{int}A$, so impliziert die Kreisförmigkeit oder die absolute Konvexität von A dieselbe Eigenschaft für $\mathrm{int}A$. $\boxed{2}$

Aufgabe 4: Sei E ein topologischer Vektorraum und $A \subset E$ absorbierend. Beweisen oder widerlegen Sie in diesem Fall

a) $0 \in \mathrm{int}A$.

b) $\mathrm{int}A$ ist absorbierend. $\boxed{3}$

Aufgabe 5: Sei $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, $C(\mathbb{R}, \mathbb{K}) := \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{K};\ f \text{ stetig}\}$ und
$p_n(f) := \max_{t \in [-n,n]} |f(t)|$, $n \in \mathbb{N}$.
Zeigen Sie: Der Raum $C(\mathbb{R}, \mathbb{K})$ bildet unter der durch die Halbnormen $p_n(f)$ induzierten Topologie einen lokalkonvexen, metrisierbaren Hausdorffraum, welcher aber nicht normierbar ist. $\boxed{4}$

Definition: *Sei $E \neq \emptyset$ eine beliebige Menge.*

a) Eine Mengenfamilie $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(E) := \{A;\ A \subset E\}$ heißt ein <u>Filter</u> auf E, falls gilt:

F_1) $\mathcal{F} \neq \emptyset$; $\emptyset \notin \mathcal{F}$,

F_2) $A, B \in \mathcal{F} \Longrightarrow A \cap B \in \mathcal{F}$,

F_3) $A \in \mathcal{F}$ und $B \supset A$ mit $B \subset E \Longrightarrow B \in \mathcal{F}$.

b) Eine Mengenfamilie $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(E)$ heißt eine <u>Filterbasis</u> auf E, falls gilt:

FB_1) $\mathcal{B} \neq \emptyset$; $\emptyset \notin \mathcal{B}$,

FB_2) Falls $A, B \in \mathcal{B} \Longrightarrow \exists\, C \subset A \cap B$, so dass $C \in \mathcal{B}$.

Aufgabe 6: Sei E ein Vektorraum über dem Körper $\mathbb{K}$ und $\mathcal{N}$ eine Filterbasis auf E mit den Eigenschaften

NU_1) Jedes $U \in \mathcal{N}$ ist absorbierend.

NU_2) Jedes $U \in \mathcal{N}$ ist kreisförmig.

NU_3) Zu jedem $U \in \mathcal{N}$ existiert ein $V \in \mathcal{N}$ mit $V + V \subset U$.

Zeigen Sie:

a) Zu jedem $n \in \mathbb{N}$ und zu jedem $U \in \mathcal{N}$ existiert ein $V \in \mathcal{N}$, so dass $\sum_{i=1}^{n} V := V + \sum_{i=1}^{n-1} V \subset U$.

b) Zu jedem $\alpha \in \mathbb{K}$ und $U \in \mathcal{N}$ existiert ein $V \in \mathcal{N}$, so dass $\alpha V \subset U$. $\boxed{4}$

Aufgabe 7: Sei E ein Vektorraum und $\mathcal{N}$ eine Filterbasis mit den Eigenschaften NU_1) – NU_2).
Zeigen Sie: Dann existiert genau eine Topologie $\mathcal{T}$ auf E, so dass $(E, \mathcal{T})$ ein topologischer Vektorraum und $\mathcal{N}$ eine Nullumgebungsbasis ist. $\boxed{6}$

Aufgabe 8: Zeigen Sie, dass der topologische Vektorraum

$$\ell^p := \left\{ x = \{x_k\}_{k=1}^{\infty}\ ;\ x_k \in \mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\},\ \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p < \infty \right\}$$

für $0 < p < 1$ unter der Metrik $d(x, y) := \sum_{k=1}^{\infty} |x_k - y_k|^p$ <u>nicht</u> lokalkonvex ist. $\boxed{4}$

Aufgabe 9: Sei E ein Vektorraum über dem Körper $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Weiter seien $A, B \subset E$ absolut konvexe und absorbierende Teilmengen von E und $p_A(x) := \inf\{\lambda,\ \lambda > 0,\ x \in \lambda A\}$ das Minkowski– Funktional von A. Zeigen Sie:

a) Falls $\alpha \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$, so gilt: $p_{\alpha A}(x) = \frac{1}{|\alpha|} p_A(x)$ für alle $x \in E$.

b) $p_{A\cap B}(x) = \max\{p_A(x), p_B(x)\}$ für alle $x \in E$.

c) Falls $A \subset B$, so gilt $p_B(x) \leq p_A(x)$ für alle $x \in E$.

d) Sei $B \subset E$ derart, dass gilt

$$\{x \in E;\ p_A(x) < 1\} \subset B \subset \{x \in E;\ p_A(x) \leq 1\}\,.$$

Dann gilt: $p_B(x) = p_A(x)$ für alle $x \in E$. $\boxed{4}$