Lehrstuhl A für Mathematik
Prof. Dr. E. Görlich
Dipl.-Math. Thorsten Heck

Aachen, den 26.10.2000

1. Übung „Topologische Vektorräume“

(Abgabe: 13.11.2000 in der Vorlesung)

Aufgabe 1: Sei E ein Vektorraum über dem Körper $\mathbb{K}$ und $A \subset E$.
Zeigen Sie:

a) Im Allgemeinen gilt: $2A \neq A + A$. $\boxed{1}$

b) Es ist $(\lambda + \mu)A \subset \lambda A + \mu A$ für beliebige $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. $\boxed{1}$

$\boxed{\boxed{2}}$

Aufgabe 2: Sei E ein Vektorraum über $\mathbb{K}$ und $A \subset E$. Beweisen Sie:

a) A ist genau dann konvex, wenn für bel. $x, y \in A$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ mit $\lambda, \mu \geq 0$ und $\lambda + \mu = 1$ gilt: $\lambda x + \mu y \in A$. $\boxed{1}$

b) (La. I.1) A ist genau dann absolut konvex, wenn für bel. $x, y \in A$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ mit $|\lambda| + |\mu| \leq 1$ gilt: $\lambda x + \mu y \in A$. $\boxed{3}$

$\boxed{\boxed{4}}$

Aufgabe 3: Beweisen Sie, dass beliebige Durchschnitte und Vereinigungen kreisförmiger Mengen wieder kreisförmig sind. $\boxed{\boxed{2}}$

Aufgabe 4: Beweisen Sie La. I.3:
Sei E ein Vektorraum über $\mathbb{K}$ und $A \subset E$, dann gilt:

a) Für die konvexe Hülle $\mathrm{conv}(A)$ gilt:

$$\mathrm{conv}(A) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \,;\, \lambda_i \in \mathbb{K},\, \lambda_i \geq 0,\, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1,\, x_i \in A \text{ für } 1 \leq i \leq n,\, n \in \mathbb{N} \right\}, \qquad \boxed{4}$$

b) $\mathrm{conv}(A)$ ist konvex. $\boxed{1}$

c) Für die absolut konvexe Hülle $\Gamma(A)$ gilt:

$$\Gamma(A) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \,;\, \lambda_i \in \mathbb{K},\, \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i| \leq 1,\, x_i \in A \text{ für } 1 \leq i \leq n,\, n \in \mathbb{N} \right\}, \qquad \boxed{1}$$

d) $\Gamma(A)$ ist absolut konvex. $\boxed{1}$

e) Definiert man die kreisförmige Hülle von A als die Menge $\{\lambda x\,;\, x \in A,\ \lambda \in \mathbb{K},\ |\lambda| \leq 1\}$, so gilt: $\Gamma(A)$ ist die konvexe Hülle der kreisförmigen Hülle von A, jedoch braucht die kreisförmige Hülle der konvexen Hülle von A nicht konvex zu sein. $\boxed{4}$

f) Ist A kreisförmig, so gilt: $\Gamma(A) = \operatorname{conv}(A)$. $\boxed{1}$

g) Wenn $A, B \subset E$ absolut konvex sind, dann auch $A + B$ und λA für bel. $\lambda \in \mathbb{K}$. $\boxed{2}$

$\boxed{\boxed{14}}$

Aufgabe 5:

a) Zeigen Sie, daß Obermengen, endliche Durchschnitte und beliebige Vereinigungen absorbierender Mengen wieder absorbierend sind. $\boxed{3}$

b) Sind beliebige Durchschnitte von absorbierenden Mengen auch absorbierend? (Beweis oder Gegenbeispiel) $\boxed{2}$

$\boxed{\boxed{5}}$

Aufgabe 6: Sei E ein Vektorraum über $\mathbb{K}$ und $A \subset E$ nicht-leer und kreisförmig. Zeigen Sie:

a) A enthält das Nullelement und ist symmetrisch, d.h. mit $x \in A$ gilt auch $-x \in A$. $\boxed{1}$

b) Sind $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ mit $|\lambda| \leq |\mu|$, so gilt: $\lambda A \subset \mu A$. $\boxed{1}$

c) Wenn zu jedem $x \in E$ ein $\lambda \neq 0$ mit $x \in \lambda A$ existiert, dann ist A absorbierend. $\boxed{1}$

$\boxed{\boxed{3}}$

Aufgabe 7: Beweisen Sie La. I.4:
Sei A eine absolut konvexe Teilmenge eines Vektorraumes E. Folgende Aussagen sind äquivalent:

a) A ist absorbierend,

b) A spannt E auf,

c) $E = \bigcup\limits_{\lambda > 0} \lambda A$,

d) $E = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} nA$, $\boxed{\boxed{3}}$

Aufgabe 8: Beweisen Sie:

a) Wenn d eine Metrik auf E und d^* durch

$$d^*(x,y) := \inf\{d(x,y),\, 1\} \qquad (x,y \in E)$$

definiert ist, dann ist d^* eine zu d äquivalente Metrik auf E. $\boxed{3}$

b) Wenn d_1 und d_2 Metriken auf E sind und Konstanten $m, M > 0$ existieren, so dass

$$md_1(x,y) \leq d_2(x,y) \leq Md_1(x,y) \qquad (x,y \in E),$$

dann sind d_1 und d_2 äquivalent. Die Umkehrung gilt i. allg. nicht. $\boxed{4}$

$\boxed{7}$

Aufgabe 9: Seien d_1 und d_2 Metriken auf einer Menge E. Zeigen Sie die Äquivalenz folgender Aussagen:

a) d_1 und d_2 sind äquivalent.

b) Für jede Folge $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ aus E und $x \in E$ gilt:

$$\lim_{n\to\infty} d_1(x_n,x) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \lim_{n\to\infty} d_2(x_n,x) = 0.$$

$\boxed{4}$

Hinweise zum Übungsbetrieb: Die Übungen können in Gruppen bis zu 3 Personen bearbeitet werden. Zum Erwerb eine Übungsscheins müssen 50% der Gesamtpunktzahl erreicht werden.