Lehrstuhl A für Mathematik — Aachen, den 22. Dezember 2000
Prof. Dr. A. Krieg, A. Marschner

11. Übung zur Analysis III

Abgabe: Freitag, den 12.01.2001, 12.00 Uhr

Aufgabe 1 (8 Punkte) (Satz von Egoroff)
Sei M eine messbare Menge mit endlichem Maß und sei $(f_k)_k$ eine Folge von messbaren Funktionen auf M, die punktweise gegen eine Funktion f konvergiert. Dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine messbare Menge $E \subset M$, so dass $\lambda(E) < \varepsilon$ und

$$f_k|_{M \setminus E} \underset{\text{glm}}{\longrightarrow} f|_{M \setminus E}.$$

Hinweis: Man betrachte $M_{ij} = \bigcap_{k=j}^{\infty} \left\{ x \in M; |f_k(x) - f(x)| < \frac{1}{i} \right\}$ und schreibe $M \setminus E$ mit geeigneten M_{ij}.

Definition: (Maßkonvergenz)
Seien $f_k, k \geq 1$ und $M \subset \mathbb{R}^n$ Lebesgue-messbar. Die Folge $(f_k)_{k \geq 1}$ heisst maßkonvergent gegen f, wenn für jedes $\eta > 0$ gilt

$$\lim_{k \to \infty} \lambda \left(\left\{ x \in M | \; \big| f_k(x) - f(x) \big| \geq \eta \right\} \right) = 0.$$

Man schreibt: $f_k \underset{\lambda}{\longrightarrow} f$.

Aufgabe 2 (3+3+3 Punkte)
Sei M messbar mit endlichem Maß.
a) Jede punktweise konvergente Folge Lebesgue-messbarer Funktionen auf M ist auch maßkonvergent.
b) Gilt die Umkehrung von a)?
c) Ist $f_k \underset{\text{f.ü.}}{\longrightarrow} f$, $f_k \in \mathcal{L}(M)$, so ist $(f_k)_{k \geq 1}$ auch maßkonvergent gegen f.

Aufgabe 3 (5 Punkte) (Satz von Riesz)
Ist die Folge $(f_k)_{k \geq 1}, f_k \in \mathcal{L}(M)$, $M \in \mathfrak{M}, \lambda(M) < \infty$ maßkonvergent gegen $f : M \to \mathbb{R}$, so existiert eine Lebesgue-Nullmenge N und eine Teilfolge $(f_{k_j})_{j \geq 1}$, die auf $M \setminus N$ punktweise gegen f konvergiert.

Aufgabe 4 (3 Punkte)
Seien $f_k, f : M \to \mathbb{R}, M \in \mathfrak{M}$, $\lambda(M) < \infty$ f_k messbar und maßkonvergent gegen f. Dann ist f Lebesgue-messbar.

Aufgabe 5 (5 Punkte)
Seien $f_k, f, g : M \to \mathbb{R},, M \in \mathfrak{M}$, $\lambda(M) < \infty$ f_k, f messbar und $(f_k)_k$ maßkonvergent gegen f. Dann gilt:

$(f_k)_{k \geq 1}$ ist genau dann maßkonvergent gegen g, wenn $f = g$ f.ü..

Wir wünschen Ihnen ein frohes Weihnachtsfest und einen guten Rutsch ins Neue Jahr.