Lehrstuhl A für Mathematik
Prof. Dr. A. Krieg, A. Marschner

Aachen, den 24. November 2000

7. Übung zur Analysis III

Abgabe: Freitag, 01.12.2000, 10.00 Uhr

Aufgabe 1 (5 Punkte):
Seien C, S, E die Lösungsfunktionen der folgenden Anfangswertprobleme (warum existieren sie und wo sind sie definiert?):

$$C'' + C = 0, \quad C(0) = 1, \quad C'(0) = 0, \tag{1}$$
$$S'' + S = 0, \quad S(0) = 0, \quad S'(0) = 1, \tag{2}$$
$$E' - E = 0, \quad E(0) = 1. \tag{3}$$

Man leite aus diesen Anfangswertproblem die entsprechenden Eigenschaften der Funktionen ab (ohne Rückgriff auf die Kenntnis der Funktion selbst).

Aufgabe 2 (3+4 Punkte):
Sei $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in Mat(2, \mathbb{R})$ und $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda E) = \lambda^2 + a_1\lambda + a_0$ das charakteristische Polynom von A.
a) Berechnen Sie die Koeffizienten a_i in Abhängigkeit von $\operatorname{Spur} A$ und $\det A$.
b) Man zeige, dass alle Lösungen von $y' = Ay$ genau dann asymptotisch stabil sind, wenn $\operatorname{Spur} A < 0$ und $\det A > 0$.

Aufgabe 3 (5+3 Punkte):
Gegeben sei die Differentialgleichung $y' = p(x)y + q(x)$ mit auf $[0, \infty)$ stetigen Funktionen p, q.
a) Man gebe eine Bedingung an, wann Lösungen dieser Differentialgleichung asymptotisch stabil, stabil bzw. instabil sind.
b) Man gebe eine konkrete Bedingung wie in a) für Polynome p, q an.

Aufgabe 4 (3+3 Punkte): Man löse die folgenden Differentialgleichungen:
a)
$$y''' - 5y'' + 8y' - 4y = 0.$$
b)
$$y'' + y' - 2y = 0.$$