Lehrstuhl A für Mathematik
Prof. Dr. A. Krieg, A. Marschner

Aachen, den 10. November 2000

5. Übung zur Analysis III

Abgabe: Freitag, 17.11.2000, 10.00 Uhr

Organisatorisches: Wegen mangelndem Interesse wird die Diskussionsstunde von Marcel Makowski, die bis jetzt immer dienstags von 16.00-17.30 Uhr stattgefunden hat, abgesetzt. Wir bitten die Teilnehmer in eine der anderen beiden angebotenen Diskussionsstunden zu gehen. Marcel wird dafür von nun an mehr in die Korrektur der Übungen involviert sein. Bei Beschwerden könnt Ihr weiterhin zu Eurem Diskussionsstundenleiter gehen.

Aufgabe 1 (6 Punkte): Berechnen Sie alle Lösungen des Systems

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2 + y_3, \\ y_2' &= y_1 + y_3, \\ y_3' &= y_1 + y_2. \end{aligned}$$

Aufgabe 2 (3+5 Punkte): Berechnen Sie die Lösungsgesamtheit der folgenden Systeme von Differentialgleichungen:

a) $$\begin{aligned} y_1' &= -7y_1 + y_2, \\ y_2' &= -2y_1 - 5y_2, \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} y_1' &= -y_1 + y_2 + e^x, \\ y_2' &= y_1 + y_2 + e^x. \end{aligned}$$

Aufgabe 3 (8+2 Punkte):

a) Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x), \qquad y(0) = y_0,\ y'(0) = y_1$$

mit $x \in \mathcal{U}_\delta(0) = \{x \in \mathbb{R};\ |x| < \delta\}$, wobei

$$p(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} p_\nu x^\nu, \qquad q(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} q_\nu x^\nu, \qquad f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} f_\nu x^\nu$$

auf $\mathcal{U}_\delta(0)$ definiert sind.

Weiter sei eine Folge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ durch die Rekursion

$$a_0 := y_0, \qquad a_1 := y_1$$

$$a_{\nu+2} := \frac{1}{(\nu+2)(\nu+1)} \left(f_\nu - \sum_{\mu=0}^{\nu} (\mu+1) p_{\nu-\mu} a_{\mu+1} - \sum_{\mu=0}^{\nu} q_{\nu-\mu} a_\mu \right), \quad \nu \in \mathbb{N}_0,$$

definiert. Dann gilt:

(i) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ konvergiert auf $\mathcal{U}_\delta(0)$.

(ii) $y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ ist die eindeutig bestimmte Lösung des Anfangswertproblems auf $\mathcal{U}_\delta(0)$.

b) Mit Teil a) löse man

$$y'' + y' + y = \cos x, \qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$$

Aufgabe 4 (4+4+3 Punkte):

a) Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} : I \to Mat(2 \times 2, \mathbb{R})$ eine stetige Abbildung. Die Differentialgleichung

$$y' = Ay$$

besitze die spezielle Lösung $\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} : I \to \mathbb{R}^2$. Auf I gelte $\varphi_1(x) \neq 0$ für alle $x \in I$. Man zeige: Man erhält eine zweite, von φ linear unabhängige Lösung $\psi : I \to \mathbb{R}^2$ durch den Ansatz

$$\psi(x) = u(x) \begin{pmatrix} \varphi_1(x) \\ \varphi_2(x) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ g(x) \end{pmatrix},$$

wobei die Funktionen $u, g : I \to \mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen sind, die den folgenden Differentialgleichungen genügen:

$$\begin{aligned} g' &= \left(a_{22} - a_{12} \frac{\varphi_2}{\varphi_1} \right) g, \\ u' &= \frac{a_{12}}{\varphi_1} \, g. \end{aligned}$$

b) Man bestimme alle Lösungen des folgenden Differentialgleichungssystems auf $\mathbb{R}_+^*$:

$$\begin{aligned} y_1' &= -y_1 + \frac{1}{x} y_2 + \ln x + \frac{1}{x}, \\ y_2' &= (1-x) y_1 + y_2 + (x-1) \ln x. \end{aligned}$$

Anleitung: Eine spezielle Lösung des homogenen Systems ist $\varphi(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix}$.

c) Geben Sie ein Fundamentalsystem (ψ_1, ψ_2) der homogenen Lösung des Systems aus b) an und berechnen Sie die Wronski-Determinante dieses Lösungssystems (ψ_1, ψ_2). Berechnen Sie weiter für $x \geq 1$

$$\exp\left(\int_1^x \operatorname{Spur} A(t)\, dt \right).$$

Aufgabe 5* (5* Punkte): Der harmonische Oszillator mit Luftreibung (Turbulenzdämpfung) genügt der Bewegungsgleichung

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x + r \frac{dx}{dt} \left| \frac{dx}{dt} \right| = 0.$$

Lösen Sie diese Gleichung für die Geschwindigkeit $v(x) = \frac{dx}{dt}$. Schreiben Sie dabei $\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt}$ (In diesem Fall ist dies erlaubt!). Zeichnen Sie die Phasenbahn auf, also auf der x-Achse die Variable x und auf der y-Achse die Variable $v(x)$. Was passiert in den Umkehrpunkten $v = 0$ mit der Lösung?