LEHRSTUHL A FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. A. Krieg, A. Marschner

Aachen, den 3. November 2000

4. Übung zur Analysis III

Abgabe: Freitag, 10.11.2000, 10.00 Uhr

Organisatorisches: Wegen der Fachschaftsvollversammlung am Dienstag, dem 07.11.2000 findet wie vorher schon angekündigt die Vorlesung am Mittwoch um 8.15 Uhr statt. Für die Übung wurde ein Ausweichtermin (siehe Diskussionsforum oder Übung 1) zur Verfügung gestellt. Wir fordern alle Studierenden auf, an der Fachschaftsvollversammlung teilzunehmen.

Aufgabe 1 (5 Punkte): Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$xy' = 2xy + y + y^2 + 2x^2, \quad y(x_0) = y_0,\ x_0 \neq 0.$$

(Hinweis: Führe an geeigneter Stelle die Substitution $z = \frac{y}{x}$ durch.)

Aufgabe 2 (4 Punkte): Bestimmen Sie die Lösungsgesamtheit der Differentialgleichung

$$y' = \frac{x}{1+x^2}y + x - 1.$$

Aufgabe 3 (4+4 Punkte):

(i) Seien $a(x)$ und $b(x)$ stetige Funktionen auf $\mathbb{R}$. Eine (nichtlineare) Differentialgleichung mit Definitionsbereich $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ der Form

$$y' + a(x)y + b(x)y^\alpha = 0, \quad \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$$

heißt BERNOULLI*sche Differentialgleichung*. Zeigen Sie, dass sich jede BERNOULLIsche Differentialgleichung durch die Substitution $z = y^{1-\alpha}$ auf eine lineare Differentialgleichung für $z = z(x)$ zurückführen lässt.

(ii) Lösen Sie mit der in a) beschriebenen Methode die Differentialgleichung

$$y' - \frac{1}{2}x^2 y + \frac{1}{2}x^2 e^{-\frac{x^3}{3}} y^3 = 0.$$

Aufgabe 4 (4+4 Punkte): Gegeben seien die folgenden Anfangswertprobleme:

(i) $y' = x|y| \quad , \quad y(a) = b \quad , \quad a, b \in \mathbb{R};$

(ii) $y' = y + x^2 + (2+y)^{\frac{1}{2}} \quad , \quad y(0) = 1.$

Was kann man über Existenz und Eindeutigkeit der Lösungen sowie über maximale Lösungsintervalle jeweils sagen?