Lehrstuhl A für Mathematik
Prof. Dr. A. Krieg, A. Marschner

Aachen, den 26. Oktober 2000

3. Übung zur Analysis III

Abgabe: Freitag, 3.11.2000, 10.00 Uhr

Aufgabe 1 (4 Punkte):
Sei $I \subset \mathbb{R}^n$ ein offener Quader und $f : (f_1, \ldots, f_n)^t : I \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar. Ist f ein Gradientenfeld, dann lässt sich f darstellen als $f = \operatorname{grad} F$, wobei $F : I \to \mathbb{R}$ gegeben ist durch

$$F(x) = \sum_{j=1}^{n} \int_{y_j}^{x_j} f_j\left((y_1, \ldots, y_{j-1}, t, x_{j+1}, \ldots, x_n)^t\right) dt \quad (x \in I),$$

wobei $(y_1, \ldots, y_n)^t \in I$ beliebig und fest ist.

Aufgabe 2 (3+3+4* Punkte):
Sei $I \subset \mathbb{R}^2$ ein offener Quader. Gegeben sei die Differentialgleichung der Form

$$g(x,y) + h(x,y)y' = 0, \quad g, h \in C^{(1)}(I). \tag{1}$$

Sie heißt **exakt**, falls $f = \binom{g}{h} : I \to \mathbb{R}^2$ ein Gradientenfeld ist, d.h. es gilt $f = \operatorname{grad} F$ mit $F : I \to \mathbb{R}$.
(i) Mit Hilfe von Satz (3.5), XI gebe man eine äquivalente Charakterisierung an und bestimme F mit A1.
(ii) Zeigen Sie: Jede Lösung $y(x)$ von (1) erfüllt die Gleichung

$$F(x, y(x)) = c \quad \text{für ein} \quad c \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

(iii)* Zeigen Sie mit Hilfe des Satzes über implizite Funktionen (Satz (5.5), X), dass umgekehrt auch jede Lösung $y(x)$ von (2) die Differentialgleichung (1) erfüllt.

Aufgabe 3 (2+2+2 Punkte):
Als Anwendung zu Aufgabe 2 bestimme man die Lösungen von

(i) $x + 3y^2y' = 0,$

(ii) $2x + y + (x - 2y)y' = 0.$

Aufgabe 4 (3+3 Punkte):
Gegeben sei der offene Quader $I \subset \mathbb{R}^2$ und die Differentialgleichung

$$g(x,y) + h(x,y)y' = 0, \quad g, h \in C^{(1)}(I).$$

Eine Funktion M mit $M(x,y) \neq 0$ auf I heißt **integrierender Faktor** (oder Eulerscher Multiplikator), falls die Differentialgleichung

$$M(x,y)g(x,y) + M(x,y)h(x,y)y' = 0$$

exakt ist.

Man zeige:

(i) $M \in C^{(1)}(I)$ ist genau dann ein integrierender Faktor, wenn

$$hM_x - gM_y = M(g_y - h_x) \quad \text{gilt.}$$

(ii) Ist $h(x,y) \neq 0$ auf I und hängt $\dfrac{g_y - h_x}{h}$ nicht von y ab, so ist

$$M(x,y) = M(x) = \exp\left(\int_c^x \frac{g_y - h_x}{h}(t)\,dt\right), \quad c \in \mathbb{R},$$

ein integrierender Faktor.

(iii) Man formuliere und beweise ein zu (ii) analoges Ergebnis für den Fall, daß $\dfrac{h_x - g_y}{g}$ nicht von x abhängt.

Aufgabe 5 (3+3 Punkte):
Als Anwendung zu Aufgabe 4 löse man die Differentialgleichungen

(i) $y(1 + xy) = xy'$,

(ii) $x^2 + y - xy' = 0$.

Aufgabe 6* (2*+2* Punkte):
Bestimmen Sie einen integrierenden Faktor zu den folgenden aus der Vorlesung bekannten Typen von Differentialgleichungen:

(i) $y' = f(x)g(y)$, $\quad f, g$ stetig und g diffbar mit $g(y) \neq 0$ (Separation der Variablen),

(ii) $y' = a(x)y + b(x)$, $\quad a, b$ stetig (inhomogene lineare Dgl).

Organisatorisches: Die Klausuren werden auf folgende Termine verschoben:

1. Klausur	Mittwoch, 13.12.2000, 7.30 Uhr	Hörsaal I
2. Klausur	Mittwoch, 28.02.2001, 14.00 Uhr	Hörsaal EpH
Vordiplom I/II	Dienstag, 06.03.2001, 9.00 Uhr	Hörsaal Fo4
3. Klausur	vor Beginn des Sommersemesters	

Dadurch ergibt sich auch eine Verschiebung der Übung:

statt	neuer Termin	Raum
Mittwoch, 13.12.2000, 8.15–9.45 Uhr (Üb.)	Freitag, 15.12.2000, 14.00–15.30 Uhr	EpH