Lehrstuhl A für Mathematik
Prof. Dr. A. Krieg, A. Marschner

Aachen, den 19. Oktober 2000

2. Übung zur Analysis III

Abgabe: Freitag, 27.10.2000, 10.00 Uhr

Aufgabe 1 (2+3+2+3 Punkte): Man löse die folgenden Differentialgleichungen und gebe für jede Lösung ein maximales Lösungsintervall an:

a)

$$y' = \frac{1}{1+x^2}e^y, \quad y(1) = 1,$$

b)

$$x(y^2-1) + y(x^2-1)y' = 0,$$

c)

$$y(x) = 4 + \int_1^x \frac{t}{1+t^2} y(t)dt,$$

d)

$$y' + y\sin x = \sin^3 x.$$

Aufgabe 2 Symbiose (7 Punkte): Unter Symbiose versteht man das wechselseitige förderliche Zusammenleben zweier Populationen P und Q. Ist $y_1(t)$ bzw. $y_2(t)$ die Größe von P bzw. Q zur Zeit t, so kann man den symbiotischen Prozess im mathematischen Modell näherungsweise durch folgendes System von Differentialgleichungen beschreiben: Sei $\alpha, \beta > 0$.

$$y_1'(t) = \alpha y_2(t),\ y_2'(t) = \beta y_1(t)$$

Nehmen Sie dabei an, dass zur Zeit $t = 0$ die Populationen P bzw Q die Größe $y_1(0) = y_1$ bzw. $y_2(0) = y_2$ haben.

a) Führen Sie dieses System von Differentialgleichungen auf eine Differentialgleichung 2. Ordnung zurück und lösen Sie diese analog zu Aufgabe 2a) aus Übung 1.

b) Lösen Sie nun das eigentliche System von DGLs, d.h. geben Sie alle Lösungen an.

c) Wie werden sich die beiden Populationen entwickeln?

Aufgabe 3 Prozesse wechselseitiger Zerstörung (7 Punkte): Ganz anders liegen die Dinge, wenn sich 2 Populationen P, Q der Größe $y_1(t), y_2(t)$ nicht wechselseitig fördern, sondern vielmehr schädigen. Das einfachste mathematische Modell hierfür ist das Anfangswertproblem ($\alpha, \beta > 0$)

$$y_1'(t) = -\alpha y_2(t),\ y_2'(t) = -\beta y_1(t), \quad y_1(0) = y_1,\ y_2(0) = y_2.$$

a) Führen Sie dieses System von Differentialgleichungen auf eine Differentialgleichung 2. Ordnung zurück und lösen Sie diese analog zu Aufgabe 2a) aus Übung 1.

b) Lösen Sie nun das eigentliche System von DGLs, d.h. geben Sie alle Lösungen an.

c) Wie werden sich die beiden Populationen entwickeln?

Aufgabe 4 räuberischer Prozess (6 Punkte): Als grobes mathematisches Modell für die Beziehungen zwischen einer Raubpopulation R der Größe $y_1(t)$ und einer Beutepopulation B der Größe $y_2(t)$ kann das folgende Anfangswertproblem dienen: (α, $\beta > 0$)

$$y_1'(t) = \alpha y_2(t),\, y_2'(t) = -\beta y_1(t), \quad y_1(0) = y_1,\, y_2(0) = y_2$$

a) Führen Sie dieses System von Differentialgleichungen auf eine Differentialgleichung 2. Ordnung zurück und lösen Sie diese analog zu Aufgabe 2a) aus Übung 1.
b) Lösen Sie nun das eigentliche System von DGLs, d.h. geben Sie alle Lösungen an.
c) Wie werden sich die beiden Populationen entwickeln?

Hinweis: Es bietet sich an, die Aufgaben 2 bis 4 gemeinsam zu lösen, besonders Aufgabe 2 und 3.

Bemerkung: Wie man aus den Antworten in den Teilaufgaben c) bemerkt, ist es sinnvoll, diese Modelle noch weiter mathematisch zu verfeinern, worauf wir zu gegebener Zeit noch eingehen werden.