LEHRSTUHL A FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. S. Walcher
Dipl.-Math. Bernd Ohligs

Aachen, den 14.06.2002

8. Übung zur Vorlesung Topologie

(Abgabe: Freitag, 21.06.2002, bis 11.45 Uhr im Übungskasten)

Aufgabe 1: Sei $I \subset \mathbb{R}, |I| = \infty$ und $\mathbb{R}^I := \{f : I \to \mathbb{R}; f \text{ Abbildung}\}$ versehen mit der Produkttopologie. Zeigen Sie:

a) $U \subset \mathbb{R}^I$ ist genau dann Umgebung von $f \in \mathbb{R}^I$, wenn es ein $n \in \mathbb{N}$, relle Zahlen $a_i \in I, 1 \leq i \leq n$ und $\varepsilon > 0$ gibt, so dass $U \supset \prod_{x \in I} U_x$, wobei $U_{a_i} :=]f(a_i) - \varepsilon, f(a_i) + \varepsilon[\,, 1 \leq i \leq n$ und $U_x = \mathbb{R}$ falls $x \in I \setminus \{a_i; 1 \leq i \leq n\}$.

b) Die Menge der polynomialen Abbildungen liegt dicht in $\mathbb{R}^I$.

Bemerkung: Die folgende Aufgabe ist doppelt bewertet, d.h. es sind maximal 4 Punkte zu erreichen, wobei Teil a) und b) zusammen wie eine Aufgabe gewertet werden und folglich Teil c) ebenfalls wie eine Aufgabe gewertet wird.

Aufgabe 2: Sei G eine Untergruppe von $Gl(n, \mathbb{R})$ für ein $n \in \mathbb{N}$.

a) Seien $x, y \in \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie: Durch $(x, y) \in R$ genau dann, wenn ein $A \in G$ existiert, so dass $Ax = y$, wird eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{R}^n$ definiert.

b) Bestimmen Sie die Äquivalenzklassen (und skizzieren Sie einige) für $n = 2$ und

(i) $G = SL(2, \mathbb{R})$ (Matrizen mit Determinante 1),

(ii) $G = SO(2, \mathbb{R})$ (Drehgruppe),

(iii) $G = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha^{-1} \end{pmatrix}; \alpha > 0 \right\}$.

c) (i) Beschreiben Sie den Quotientenraum $\mathbb{R}^2/R$ im Fall $G = GL(2, \mathbb{R})$.

(ii) Zeigen Sie: Für $G = SO(2, \mathbb{R})$ ist $\mathbb{R}^2/R$ homöomorph zum Intervall $[0, \infty)$ mit der von $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{nat})$ induzierten Topologie.

(iii) Zeigen Sie: Im Fall
$$G = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha^{-1} \end{pmatrix}; \alpha > 0 \right\}$$
gibt es Punkte $[x] \in \mathbb{R}^2/R$ mit $[x] \neq [0]$, aber $[x] \in U$ für jede Umgebung U von $[0]$. Gibt es einen topologische Unterraum eines $\mathbb{R}^m$ (m passend), zu dem $\mathbb{R}^2/R$ homöomorph ist?

Aufgabe 3*: Auf dem topologischen Unterraum $\underline{X} = \underline{\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}}$ von $(\mathbb{R}^3, \mathcal{T}_{nat})$ sei R die Äquivalenzrelation

$$x \sim y \qquad \Leftrightarrow \qquad \mathbb{R}x = \mathbb{R}y.$$

Die Äquivalenzklassen sind also genau die Geraden durch 0 ohne den Nullpunkt. Sei $\underline{X/R}$ der Quotientenraum und $\underline{\mathbb{R}^2} = (\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_{nat})$. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \to X/R, \quad (x_1, x_2) \mapsto [(x_1, x_2, 1)]_R,$$

injektiv, stetig und offen ist. Man nennt $\mathbb{P}^2 := X/R$ die **projektive Ebene**.