LEHRSTUHL A FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. S. Walcher
Dipl.-Math. Bernd Ohligs

Aachen, den 31.05.2001

6. Übung zur Vorlesung Topologie

(Abgabe: Freitag, 07.06.2001, bis 11.45 Uhr im Übungskasten)

Aufgabe 1*: a) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig bezüglich der natürlichen Topologie auf $\mathbb{R}$.

(i) Zeigen Sie: f ist genau dann offen, wenn f injektiv ist.

(ii) Unter welchen Voraussetzungen ist f auch abgeschlossen, wenn f offen ist?

b) Seien $S^1 := \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\}$ und $g : [0,1[\to S^1, t \to g(t) := \exp(t2\pi i)$. Auf $[0,1[$ und S^1 seien jeweils die von der Abstandsmetrik (auf $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$) induzierten Topologien gegeben. Zeigen Sie: g ist stetig und bijektiv, aber kein Homöomorphismus.

Aufgabe 2:

a) $\underline{X}, \underline{Y}$ seien homöomorphe topologische Räume. Zeigen Sie:

(i) $\mathrm{Aut}\underline{X} \cong \mathrm{Aut}\underline{Y}$.

(ii) $C(\underline{X}) \cong C(\underline{Y})$.

(iii) $\underline{X}$ erfüllt genau dann das erste (zweite) Abzählbarkeitsaxiom, wenn $\underline{Y}$ das erste (zweite) Abzählbarkeitsaxiom erfüllt.

b) Seien $\underline{X}, \underline{Y}$ topologische Räume mit $\mathrm{Aut}\underline{X} \cong \mathrm{Aut}\underline{Y}$. Folgt hieraus die Homöomorphie der topologischen Räume? (Beweis oder Gegenbeispiel!)

Aufgabe 3: Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

(i) $\mathcal{T}$ ist eine Partitionstopologie auf X.

(ii) Es existiert ein diskreter topologischer Raum $\underline{Y}$ und eine Abbildung $f : X \to Y$, so daß $\mathcal{T}$ die Initialtopologie von $(f : X \to \underline{Y})$ ist.

Aufgabe 4: Sei $\underline{X}_i, i \in I$, eine Familie von paarweise disjunkten topologischen Räumen, $X = \bigcup_{i\in I} X_i$ und $\iota_i : X_i \to X, x \to x, i \in I$, die gewöhnliche Inklusion. Sei $\mathcal{T}$ die Finaltopologie von $(\iota_i : \underline{X}_i \to X)_{i\in I}$. Man nennt $(X, \mathcal{T})$ die **topologische Summe** der $(\underline{X}_i)_{i\in I}$. Zeigen Sie

$$\mathcal{T} = \{A \subset X; A \cap X_i \text{ offen in } \underline{X}_i \text{ für alle } i \in I\}.$$