LEHRSTUHL A FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. S. Walcher
Dipl.-Math. Bernd Ohligs

Aachen, den 17.05.2001

5. Übung zur Vorlesung Topologie

(Abgabe: Freitag, 31.05.2001, bis 11.45 Uhr im Übungskasten)

Aufgabe 1: Die Menge $M_n(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n^2}$ der reellen $n \times n$–Matrizen sei mit der natürlichen Topologie versehen.

a) Zeigen Sie, dass die folgenden Mengen abgeschlossene Teilmengen von $M_n(\mathbb{R})$ sind:

(i) $\mathrm{Sym}_n(\mathbb{R}) = \{S \in M_n(\mathbb{R});\ S^t = S\}$ (symmetrische Matrizen),

(ii) $\mathrm{Alt}_n(\mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R});\ A^t = -A\}$ (schiefsymmetrische Matrizen),

(iii) $\mathrm{O}_n(\mathbb{R}) = \{U \in M_n(\mathbb{R});\ UU^t = U^tU = E\}$ (orthogonale Gruppe),

(iv) $SL_n(\mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}); \det A = 1\}$ (spezielle lineare Gruppe),

(v) $N_n(\mathbb{R}) = \{N \in M_n(\mathbb{R})\ ;\ \exists k \in \mathbb{N}\ \ N^k = 0\}$ (nilpotente Matrizen).

b) Zeigen Sie, dass die allgemeine lineare Gruppe $GL_n(\mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}); \det A \neq 0\}$ eine offene Teilmenge von $M_n(\mathbb{R})$ ist.

c) Zeigen Sie, dass die Menge $D_n(\mathbb{R})$ der diagonalisierbaren Matrizen in $M_n(\mathbb{R})$ für $n > 1$ weder offen noch abgeschlossen ist.

d) Zeigen Sie, dass die Menge $P_n(\mathbb{R})$ der positiv definiten Matrizen eine offene Teilmenge und die Menge $\mathrm{Psd}_n(\mathbb{R})$ der positiv semi–definiten Matrizen, eine abgeschlossene Teilmenge von $\mathrm{Sym}_n(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n(n+1)/2}$ ist.

Aufgabe 2: Seien $\underline{X} := (X, \mathcal{T}_X), \underline{Y} := (X, \mathcal{T}_Y)$ topologische Räume und $f : X \to Y$ stetig und bijektiv. In welchen der folgenden Fälle ist f dann notwendig ein Homöomorphimus bzw. mit Sicherheit kein Homöomorphimus?

a) $\underline{X} = \underline{Y} = (\mathbb{R}, \mathcal{T}_{nat})$,

b) $\underline{X} = \underline{Y} = (\mathbb{R}, \mathcal{T}_{cof})$,

c) $\underline{X} = (\mathbb{R}, \mathcal{T}_{nat}), \underline{Y} = (\mathbb{R}, \mathcal{T}_{cof})$,

d) $\underline{X} = (\mathbb{R}, \mathcal{T}_{cof}), \underline{Y} = (\mathbb{R}, \mathcal{T}_{nat})$.

Aufgabe 3*: Sei $\mathbb{N}$ versehen mit der cofiniten Topologie. $f,\ g,\ h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ seien definiert durch $f(1) = g(1) = h(1) := 1$ und

$$\begin{aligned} f(n) &:= \max\{k \in \mathbb{N} \mid k|n \text{ und } k < n\}, \\ g(n) &:= \max\{k \in \mathbb{N} \mid k|n \text{ und } k \text{ prim}\}, \\ h(n) &:= \begin{cases} n, & \text{falls } n \text{ prim}, \\ n - g(n), & \text{sonst.} \end{cases} \end{aligned}$$

für $n \geq 2$. Untersuchen Sie die Abbildungen f, g und h auf Stetigkeit.

Aufgabe 4: (Canberra-Metrik) Sei $\mathbb{R}^+ := \{x \in \mathbb{R}; x > 0\}$ und $n \in \mathbb{N}$. Definiere dann

$$d(x,y) := \sum_{i=1}^{n} \frac{|x_i - y_i|}{|x_i| + |y_i|} \qquad (x = (x_1, \ldots, x_n)^t, y = (y_1, \ldots, y_n)^t \in (\mathbb{R}^+)^n).$$

Zeigen Sie:

a) d ist eine Metrik auf $(\mathbb{R}^+)^n$. **Hinweis:** Betrachten Sie beim Nachweis der Dreiecksungleichung zuerst den Fall $n = 1$.

b) Für $A = diag(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in (\mathbb{R}^+)^{n \times n}$ gilt

$$d(Ax, Ay) = d(x,y) \qquad (\textbf{Skaleninvarianz}).$$