LEHRSTUHL A FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. S. Walcher
Dipl.-Math. Bernd Ohligs

Aachen, den 03.05.2001

# 3. Übung zur Vorlesung Topologie

(Abgabe: Freitag, 10.05.2001, bis 11.45 Uhr im Übungskasten)

**Aufgabe 1:** Bestimmen Sie alle Häufungs- und Randpunkte der Menge $A := \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$, wenn $\mathbb{R}$ mit der natürlichen, diskreten, indiskreten bzw. coabzählbaren Topologie versehen ist.

**Aufgabe 2*:** a) Für $n \in \mathbb{N}$ betrachten wir das Paar $(\mathbb{R}^n, d)$ mit

$$d(x,y) := |x_1 - y_1| \qquad (x = (x_1, ..., x_n), y = (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n).$$

Zeigen Sie, dass $(\mathbb{R}^n, d)$ ein pseudometrischer Raum ist. Wann ist $d$ eine Metrik?

b) Sei $C[0,1]$ der Raum aller stetigen, reellwertigen Funktionen auf $[0,1]$ und

(i) $\|f\|_1 := \max\limits_{x\in[0,1]} |f(x)| \qquad (f \in C[0,1]),$

(ii) $\|f\|_2 := \int\limits_0^1 |f(x)|dx \qquad (f \in C[0,1]).$

Zeigen Sie, dass hierdurch zwei Normen auf $C[0,1]$ definiert sind und geben Sie die induzierten Metriken auf $C[0,1]$ an.

c) Für $i \in \{1,2\}$ bezeichne $d_i$ die von der Norm $\|\circ\|_i$, aus Teil b) induzierte Metrik auf $C[0,1]$. Zeigen Sie:

$$f \in K_r^{d_1}(0) \quad \Longrightarrow \quad f \in K_r^{d_2}(0) \qquad (f \in C[0,1]).$$

d) Sei $f_n \in C[0,1], n \in \mathbb{N}$, definiert durch

$$f_n(x) := \begin{cases} 2n^2 x\,, & 0 \le x < \frac{1}{2n} \\ -2n^2(x - \frac{1}{n})\,, & \frac{1}{2n} \le x < \frac{1}{n} \\ 0\,, & \frac{1}{n} \le x \le 1 \end{cases} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Skizzieren Sie $f_n$ und zeigen Sie:

(i) $f_n \in K_1^{d_2}(0), f_n \notin K_1^{d_1}(0) \qquad (n \in \mathbb{N}),$

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty} d_1(f_n, 0) = \lim\limits_{n\to\infty} \|f_n\|_1 = +\infty,$

(iii) $\|\circ\|_1$ und $\|\circ\|_2$ sind nicht äquivalent.

**Hinweis:** Benutzen Sie bekannte Ergebnisse der Analysis.

**Aufgabe 3:**

a) Sei $\underline{X} = (X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $\mathcal{B}$ eine Basis von $\mathcal{T}$. $U \in \mathcal{B}$ habe die Eigenschaft

   $(*)$ Zu jedem $x \in U$ existiert ein $V \in \mathcal{B}$ mit $x \in V \subset U, V \neq U$.

   Zeigen Sie: $\mathcal{B} \setminus \{U\}$ ist eine Basis von $\mathcal{T}$.

b) Sei $\underline{X} = (X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum derart, dass für jede Basis $\mathcal{B}$ und jedes $U \in \mathcal{B}$ die Eigenschaft $(*)$ gilt. Zeigen Sie, dass $\underline{X}$ keine Basis besitzt, die (bezüglich der Inklusion) minimal ist.

c) Zeigen Sie: $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{nat})$ besitzt keine minimale Basis.

d) Sei $X$ eine Menge und $\mathcal{T}$ eine Partitionstopologie auf $X$. Zeigen Sie, dass $(X, \mathcal{T})$ eine minimale Basis besitzt.

**Aufgabe 4:** Seien $\mathcal{T}_1$ und $\mathcal{T}_2$ Topologien auf $X \neq \emptyset$ mit Basen $\mathcal{B}_1$ und $\mathcal{B}_2$.

a) Zeigen Sie, dass aus der Bedingung

   $(*)$ Zu jedem $B_2 \in \mathcal{B}_2$ existiert ein $B_1 \in \mathcal{B}_1$ mit $B_1 \subset B_2$.

   i.a. nicht auf $\mathcal{T}_2 \subset \mathcal{T}_1$ geschlossen werden kann.
   Hinweis: Betrachten Sie zwei Topologien mit drei Elementen.

b) Wie muss die Bedingung $(*)$ verschärft werden, um auf $\mathcal{T}_2 \subset \mathcal{T}_1$ schließen zu können?