LEHRSTUHL A FÜR MATHEMATIK

Prof. Dr. A. Krieg, A. Marschner

Aachen, den 31. Mai 2002

6. Übung zur Höheren Funktionentheorie II

Abgabe: Montag, 10.06.2002, 12.00 Uhr

Aufgabe 1 (**hyperbolische Matrizen**)(4 Punkte):
Jedes $M \in \mathrm{SL}(2;\mathbb{R})$ ist ein Produkt von 2 hyperbolischen Matrizen.

Aufgabe 2 (**parabolische Matrizen**) (4 Punkte):
Sei $M \in \mathrm{SL}(2;\mathbb{R})$ parabolisch und sei $\varepsilon := \frac{\mathrm{Spur}\, M}{2}$. Man zeige:

$$M^n = n\varepsilon^{n-1}M - (n-1)\varepsilon^n E \quad \text{für alle } n \in \mathbb{Z}.$$

Aufgabe 3 (**Konjugation**)(4 Punkte):
Jedes $M \in \mathrm{SL}(2;\mathbb{R})$, $M \neq \pm E$, ist in der $\mathrm{SL}(2;\mathbb{R})$ konjugiert zu $\begin{pmatrix} 0 & \mp 1 \\ \pm 1 & s \end{pmatrix}$, $s = \mathrm{Spur}\, M$. Wann sind 2 von solchen (letzteren) Matrizen zueinander konjugiert?

Aufgabe 4 (**Isomorphie von** $\mathbb{H} \times \mathbb{H}$) (8 Punkte):
Es seien $\mathcal{K} = \{Z \in \mathrm{Mat}(2;\mathbb{R}); Z + Z^t \in \mathrm{Pos}(2;\mathbb{R})\}$ und $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Man zeige:

$$\phi : \mathbb{H} \times \mathbb{H} \to \mathcal{K},\ (\tau, w) \mapsto Z := uJ + vF_\tau,\ w = u + iv,$$

ist eine Bijektion, und für $M \in \mathrm{SL}(2;\mathbb{R})$, $\lambda > 0$ gelten folgende Gesetze:

(i) $\phi((M\tau, w)) = \left(M^{-1}\right)^t ZM^{-1}$,

(ii) $\phi((\tau, w+1)) = Z + J$,

(iii) $\phi((z, \lambda w)) = \lambda Z$,

(iv) $\phi((-\frac{1}{\tau}, -\frac{1}{w})) = Z^{-1}$,

(v) $\phi((\tau, -\overline{w})) = Z^t$,

(vi) $\phi((-\overline{\tau}, w)) = D^t Z D$ mit $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.