LEHRSTUHL A FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. A. Krieg, A. Marschner

Aachen, den 10. Mai 2002

4. Übung zur Höheren Funktionentheorie II

Abgabe: Montag, 27.05.2002, 12.00 Uhr

Aufgabe 1 (**Additionstheorem für $\wp'$**)(4 Punkte):
Man zeige (für welche $z,w\in\mathbb{C}$ gelten die Relationen?):

a)

$$\wp'(z+w) = -\frac{1}{2}(\wp'(z)+\wp'(w)) + \frac{1}{4}\frac{(\wp'(z)-\wp'(w))(\wp''(z)-\wp''(w))}{(\wp(z)-\wp(w))^2} - \frac{1}{4}\left(\frac{\wp'(z)-\wp'(w)}{\wp(z)-\wp(w)}\right)^3$$

b)

$$\begin{aligned}\wp'(2z) &= -\wp'(z) + \frac{1}{4}\frac{\wp''(z)\wp'''(z)}{\wp'(z)^2} - \frac{1}{4}\left(\frac{\wp''(z)}{\wp'(z)}\right)^3\\ &= -\wp'(z) + \frac{3\wp(z)\wp''(z)}{\wp'(z)} - \frac{1}{4}\left(\frac{\wp''(z)}{\wp'(z)}\right)^3\\ &= \frac{28\wp^3(z)-g_2\wp(z)+2g_3}{2\wp'(z)} - \frac{1}{4}\left(\frac{12\wp^2(z)-g_2}{2\wp'(z)}\right)^3.\end{aligned}$$

Aufgabe 2 (**Ordnungen elliptischer Punkte**) (5 Punkte):
Sei Ω ein beliebiges Gitter. Dann zeige man:

a) Es gibt genau 3 Punkte der Ordnung 2 in $\overline{\mathbb{E}}$, nämlich $(e_1,0)$, $(e_2,0)$ und $(e_3,0)$.

b) Zu $n\in\mathbb{N}$ gibt es genau n^2 Punkte in $\overline{\mathbb{E}}$, deren Ordnung ein Teiler von n ist. Wieviele Punkte gibt es von der Ordnung n?

Aufgabe 3 (**reelle elliptische Kurve**)(5 Punkte):
Sei Ω ein Gitter. Man zeige:

a) Die Gruppe $\overline{\mathbb{E}}$ ist isomorph zu $\mathbb{R}/\mathbb{Z}\times\mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

b) Für ein Rechteckgitter Ω gilt:

$$\mathbb{E}_{\mathbb{R}} := \mathbb{E}\cap(\mathbb{R}\times\mathbb{R}) = \left\{(\wp(z),\wp'(z)); z\in(\frac{\omega}{2}+\mathbb{R})\setminus\Omega, \omega\in\Omega\right\}.$$

c) Für ein Rechteckgitter Ω gilt:

$\overline{\mathbb{E}}_{\mathbb{R}} := \mathbb{E}_{\mathbb{R}}\cup\{O\}$ ist eine zu $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\times\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ isomorphe Untergruppe von $\overline{\mathbb{E}}$.

Aufgabe 4* (**Verallgemeinerung der Sätze von Liouville**) (5 Punkte):
Sei $0 \neq f \in \mathcal{M}$, so dass zu jedem $\omega \in \Omega$ ein $c(\omega) \in \mathbb{C}$ gibt mit $f(z+\omega) = c(\omega) f(z)$ für alle $z \in \mathbb{C} \setminus D_f$. Dann gilt

a) $\mathrm{ord}_{c+\omega} = \mathrm{ord}_c f$ für alle $c \in \mathbb{C}$, $\omega \in \Omega$.

b) $\sum_{c \in P} \mathrm{ord}_c f = 0$.

c) Ist f ganz, so existieren $a, b \in \mathbb{C}$ mit $f(z) = ae^{bz}$ für alle $z \in \mathbb{C}$.

Aufgabe 5 (**Produktdarstellung**)(6 Punkte):
Wie in Aufgabe 4 sei $f \in \mathcal{M}$ mit $f(z+\omega) = c(\omega) f(z)$ für alle $\omega \in \Omega$. f habe in P Nullstellen in a_i, $i = 1, \ldots, r$ und Polstellen in $b_i, i = 1, \ldots, r$ (Ist dies eine Einschränkung?) Man zeige:
Dann gibt es $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ mit

$$f(z) = \alpha \frac{\sigma(z-a_1) \cdot \ldots \cdot \sigma(z-a_r)}{\sigma(z-b_1) \cdot \ldots \cdot \sigma(z-b_r)} e^{\beta z}.$$

Umgekehrt erfüllt jedes solche Produkt auch $f(z+\omega) = c(\omega) f(z)$ mit

$$c(\omega) = e^{\beta\omega + \eta(\omega)(b_1 + \ldots + b_r - a_1 - \ldots - a_r)}.$$