LEHRSTUHL A FÜR MATHEMATIK Aachen, den 26. April 2002
Prof. Dr. A. Krieg, A. Marschner

2. Übung zur Höheren Funktionentheorie II

Abgabe: Montag, 06.05.2002, 12.00 Uhr

Aufgabe 1 (Trennung von Punkten)(4 Punkte):
Ω sei ein Gitter in $\mathbb{C}$ und $a,b \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie:

a) Genau dann existiert ein $f \in \mathcal{K}(\Omega)$, welches in a und b holomorph ist und dort verschiedene Werte annimmt, wenn $a+\Omega \neq b+\Omega$ gilt. ($\mathcal{K}(\Omega)$ trennt die Punkte von $\mathbb{C}/\Omega$.)

b) Der Körper $\mathcal{K}(\Omega)$ ist nicht rational, d.h. es existiert kein $f \in \mathcal{K}(\Omega)$ mit $\mathcal{K}(\Omega) = \mathbb{C}(f)$.

Aufgabe 2 (gerade elliptische Funktionen)(4 Punkte):
Ω sei ein Gitter in $\mathbb{C}$. Für gegebenes $\omega \in \Omega$ mit $\omega \notin 2\Omega$ definieren wir eine Funktion T durch

$$T(z) = T_\omega(z) = \frac{\wp(\omega/4) - \wp(\omega/2)}{\wp(z) - \wp(\omega/2)}, \quad z \in \Omega.$$

Zeigen Sie:

a) T ist eine gerade elliptische Funktion bezüglich Ω mit Nullstellen 2. Ordnung in den Punkten von Ω und Polen 2. Ordnung in den Punkten $\frac{\omega}{2} + \Omega$.

b) Jede gerade elliptische Funktion kann rational durch T dargestellt werden.

c) $T(z) \cdot T(z + \frac{\omega}{2}) = 1$.

Aufgabe 3 (Gitter mit vorgegeben e_i) (4 Punkte):
Zu paarweise verschiedenen $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$ mit $\alpha + \beta + \gamma = 0$ gibt es genau ein Gitter Ω in $\mathbb{C}$ mit $e_1 = \alpha$, $e_2 = \beta$ und $e_3 = \gamma$.

Aufgabe 4 (λ-Funktion)(4 Punkte):
Auf der oberen Halbebene $\mathbb{H}$ betrachten wir zu τ das Gitter $\Omega_\tau = \mathbb{Z}\tau + \mathbb{Z}$ und die Funktion

$$\lambda(\tau) = \frac{\wp_{\Omega_\tau}(\frac{\tau}{2}) + \wp_{\Omega_\tau}(\frac{\tau+1}{2})}{\wp_{\Omega_\tau}(\frac{1}{2}) - \wp_{\Omega_\tau}(\frac{\tau+1}{2})}.$$

Zeigen Sie: λ ist holomorph und genügt der Bedingung

$$\lambda\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}\right) = \lambda(\tau), \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}) \quad \text{mit} \quad b, c \text{ gerade}.$$

Ferner existiert zu jedem $\gamma \in \mathbb{C}$, $\gamma \neq 0, 1$ ein $\tau \in \mathbb{H}$ mit $\lambda(\tau) = \gamma$.

Aufgabe 5 (Teilersummen-Identitäten)(4 Punkte):
Man berechne analog zur Hurwitz-Identität eine Identität für σ_9 und σ_{11}, in der jeweils nur σ_3 und σ_5 vorkommen.