LEHRSTUHL A FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. A. Krieg, A. Marschner Aachen, den 12. Juli 2002

11. Übung zur Höheren Funktionentheorie II

Abgabe: Montag, 22.07.2002, 12.00 Uhr

Dies ist die letzte Übung dieses Semesters. Das gesamte Team wünscht Euch eine erfolgreiche und erholsame vorlesungsfreie Zeit und hofft, Euch im nächsten Semester wieder zu sehen. Die obengenannte Abgabe kann bei Bedarf auch nach hinten geschoben werde, allerdings zählen die Punkte dann nicht mehr für den Schein.

Aufgabe 1 (**Fixpunkte und Nullstellen**)(5^* Punkte):

Seien $\tau \in \mathbb{H}$ und $k \in \mathbb{Z}$, $k > 2$. Zeigen Sie

a) Es gibt genau dann ein $f \in \mathbb{M}_k$ mit $f(\tau) \neq 0$, wenn k ein Vielfaches der Ordnung der Fixgruppe Γ_τ ist.

b) Nun sei $k = 12$ oder $k > 14$, so dass k ein Vielfaches der Ordnung der Fixgruppe Γ_τ ist. Dann gibt es ein $f \in \mathbb{S}_k$ mit $f(\tau) \neq 0$.

Aufgabe 2 (**Algebrenisomorphismus für** $\mathbb{M}$)(5^* Punkte):

Sei $\wp(z;\tau,1)$ die $\wp$-Funktion zum Gitter $\mathbb{Z}\tau + \mathbb{Z}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\wp\left(\frac{1}{2};\tau,1\right) + \wp\left(\frac{\tau}{2};\tau,1\right) + \wp\left(\frac{\tau+1}{2};\tau,1\right) &= 0\\
\wp\left(\frac{1}{2};\tau,1\right)^2 + \wp\left(\frac{\tau}{2};\tau,1\right)^2 + \wp\left(\frac{\tau+1}{2};\tau,1\right)^2 &= 30 \cdot G_4(\tau)\\
\wp\left(\frac{1}{2};\tau,1\right)^3 + \wp\left(\frac{\tau}{2};\tau,1\right)^3 + \wp\left(\frac{\tau+1}{2};\tau,1\right)^3 &= 105 \cdot G_6(\tau)
\end{aligned}$$

Zu $f \in \mathbb{M}_k$ gibt es ein homogenes, symmetrisches Polynom $P(X,Y,Z)$ vom Gewicht $\frac{k}{2}$ mit

$$P\left(\wp(\frac{1}{2};\tau,1\right), \wp\left(\frac{\tau}{2};\tau,1\right), \wp\left(\frac{\tau+1}{2};\tau,1)\right) = f(\tau).$$

Die Algebra $\mathbb{M}$ ist isomorph zur Quotientenalgebra der symmetrischen Polynome über $\mathbb{C}$ in X,Y,Z nach dem von $X+Y+Z$ erzeugten Ideal.

Aufgabe 3 (**Erzeugende Funktionen**)(5^* Punkte):
Man zeige:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \dim \mathbb{M}_k x^k = \frac{1}{(1-x^4)(1-x^6)}, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \dim \mathbb{S}_k x^k = \frac{x^{12}}{(1-x^4)(1-x^6)}.$$

Aufgabe 4 (**Modulformen ohne Nullstellen**)(5^* Punkte):
Es gibt genau dann ein $f \in \mathbb{M}_k$ mit $f(\tau) \neq 0$ für alle $\tau \in \mathbb{H}$, wenn $12|k$. In diesem Fall gilt $f = c\Delta^{k/12}$ für ein $0 \neq c \in \mathbb{C}$.