LEHRSTUHL A FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. A. Krieg, A. Marschner

Aachen, den 05. Juli 2002

10. Übung zur Höheren Funktionentheorie II

Abgabe: Montag, 15.07.2002, 12.00 Uhr

Aufgabe 1 (Gewichtsformel für Γ_ϑ**)**(20 Punkte):

Sei $k \in \mathbb{Z}$ eine Funktion $f : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ heißt ganze Modulform vom Gewicht k zu Γ_ϑ, wenn gilt

(Mk1) f ist holomorph auf $\mathbb{H}$.

(Mk2) $f|_k M = f$ für alle $M \in \Gamma_\vartheta$.

(Mk3) $f|_k M$ ist für jedes $M \in \Gamma$ bei ∞ holomorph.

Die dabei entstehende Menge wird mit $\mathbb{M}_k(\Gamma_\vartheta)$ bezeichnet. $f \in \mathbb{M}_k(\Gamma_\vartheta)$ heisst Spitzenform, wenn $f|_k M$ für jedes $M \in \Gamma$ bei ∞ sogar eine Nullstelle hat und wird mit $\mathbb{S}_k(\Gamma_\vartheta)$ bezeichnet.

a) $\mathbb{M}_k(\Gamma_\vartheta)$ und $\mathbb{S}_k(\Gamma_\vartheta)$ sind Vektorräume mit
$$\mathbb{M}_k(\Gamma_\vartheta) \cdot \mathbb{M}_l(\Gamma_\vartheta) \subset \mathbb{M}_{k+l}(\Gamma_\vartheta) \quad \text{und} \quad \mathbb{M}_k(\Gamma_\vartheta) \cdot \mathbb{S}_l(\Gamma_\vartheta) \subset \mathbb{S}_{k+l}(\Gamma_\vartheta).$$

b) Sei $k \in \mathbb{Z}$, $f \in \mathbb{M}_k(\Gamma_\vartheta)$ und $M \in \Gamma$, so besitzt $f|_k M$ eine Fourierentwicklung der Form
$$(f|_k M)(\tau) = \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_f(m;M) e^{\pi i m \tau}, \quad \tau \in \mathbb{H},$$
die für jedes $\varepsilon > 0$ auf der Menge $\{\tau \in \mathbb{H}; \operatorname{Im}\tau \geq \varepsilon\}$ absolut gleichmäßig konvergiert. Die Fourierkoeffizienten $\alpha_f(m;M)$ sind eindeutig bestimmt und erfüllen
$$\alpha_f(m;LM) = \alpha_f(m;M) \quad \text{für alle} \quad m \in \mathbb{N}_0, L \in \Gamma_\vartheta, M \in \Gamma.$$
Desweiteren gilt:
$$\alpha_f(m;I) = \frac{1}{2}\int_w^{w+2} f(\tau) e^{-\pi i m \tau} d\tau.$$
Hinweis: Betrachte die Funktion $g(\tau) := (f|_k M)(2\tau)$.

c) Sei $\mathbb{F}_\vartheta := \{\tau \in \mathbb{H}; |\tau| \geq 1, -1 < x \leq 1, |\tau| > 1 \,\text{für}\, -1 < x < 0\}$ Man zeige: Gehören τ und $M\tau$, $M \in \Gamma_\tau$ mit $M \neq \pm E$ zu $\mathbb{F}_\vartheta$, so folgt
$$\tau = M\tau = i \quad \text{und} \quad M = \pm J.$$

d) Sei $0 \neq f \in \mathbb{M}_k(\Gamma_\vartheta)$. Für $q \in \mathbb{Q}$ sei $\operatorname{ord}_q f := \operatorname{ord}_\infty f|M$, falls $M \in \Gamma$ mit $M\infty = q$. Zeigen Sie, dass die Definition unabhängig von der Wahl der Matrix ist.

e) Man zeige die folgende Gewichtsformel für Γ_ϑ:
$$2\operatorname{ord}_\infty f + \operatorname{ord}_1 f + \frac{1}{2}\operatorname{ord}_i f + \sum_{w \in \mathbb{F}_\vartheta, w \neq i} \operatorname{ord}_w f = \frac{k}{4}.$$
Hinweis: Führen sie entweder den Beweis wie in der Gewichtsformel zu Γ oder konstruiere eine Funktion, auf die man die Gewichtsformel zu Γ anwenden kann.

f) Man stelle eine Tabelle analog wie auf Seite 150 im Buch von Professor Krieg auf. Dabei sei $0 \leq k \leq 10$.

g) Kann man einige der Ergebnisse von der Proposition auf Seite 150 auch für ganze Modulformen zu Γ_ϑ zeigen? (Da wir noch keine Modulformen zu Γ_ϑ kennen, die nicht auch Modulformen zu Γ ist, entfallen einige Ergebnisse automatisch.)