Lehrstuhl A für Mathematik
Prof. Dr. R. L. Stens, Tel.: 80-94532
Dipl.-Math. A. Haß, Tel.: 80-94526

Aachen, den 14.06.2002

8. Übung zur Fourier-Analysis I

(Abgabe: 21.06.2002 vor der Übung)

Aufgabe 1: Lösen Sie die folgenden linearen Differentialgleichungen mit Hilfe der Fourier-Analysis.

a) $y'(x) + 2y(x) = \cos 2x$ $\boxed{6}$

b) $y''(x) + y'(x) + y = \sin 3x + \cos x$ $\boxed{6}$

Hinweis: Bilden Sie unter der Annahme der Existenz einer Lösung y die Fourier-Koeffizienten beider Seiten der Dgl; so erhalten Sie für jedes $k \in \mathbb{Z}$ eine Gleichung für $y^\wedge(k)$. Wenden Sie nach dem Lösen dieser Gleichungen die Umkehrtransformation an und verifizieren Sie das Ergebnis.

Aufgabe 2: Betrachten Sie das **Fourier'sche Ringproblem** (aus der Einleitung der Vorlesung): Sei $f \in X_{2\pi}$. Bestimmen Sie eine Funktion $u(x,t)$ für $x \in \mathbb{R}$ und $t > 0$, die 2π-periodisch in x ist und die folgenden Bedingungen erfüllt:

i) $\frac{\partial}{\partial x}u(x,t)$, $\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t)$, $\frac{\partial}{\partial t}u(x,t)$ existieren für alle $x \in \mathbb{R}$ und $t > 0$.

ii) u genügt der partiellen Differentialgleichung $\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und $t > 0$.

iii) $\lim_{t\to 0+} \|u(\cdot,t) - f(\cdot)\|_{X_{2\pi}} = 0$.

iv) $u(\cdot,t) \in X_{2\pi}^{(2)}$ für alle $t > 0$.

v) $\frac{\partial}{\partial t}u(\cdot,t) \in X_{2\pi}$ für alle $t > 0$, und es gilt

$$\lim_{h\to 0+} \left\| \frac{u(\cdot,t+h) - u(\cdot,t)}{h} - \frac{\partial u(\cdot,t)}{\partial t} \right\|_{X_{2\pi}} = 0.$$

Hinweis: Wenden Sie unter der Annahme der Existenz einer Lösung u die Fourier-Transformation auf die Dgl aus ii) an. Lösen Sie die erhaltenen gewöhnlichen Dgl'en und transformieren Sie diese zurück. Verifizieren Sie schließlich die geforderten Eigenschaften für den so erhaltenen Kandidaten; benutzen Sie hierbei für iii) ohne Beweis, dass der (periodische) **Gauß-Weierstraß-Kern** $\{\chi_t\}_{t>0}$ mit $(\chi_t)^\wedge(k) = e^{-tk^2}$, $\forall k \in \mathbb{Z}$, $t > 0$, eine gerade, positive, approximierende Identität für $t \to 0+$ ist (vgl. auch Lit. B VIII 3 (Butzer-Nessel), p.61, 281). $\boxed{12}$

Aufgabe 3: Zeigen Sie, dass zwischen den $L^p(\mathbb{R})$–Räumen keine Inklusionen bestehen, d.h., für $1 \leq p, q \leq \infty$ mit $p \neq q$ gilt

$$L^p(\mathbb{R}) \not\subset L^q(\mathbb{R}) \quad \text{und} \quad L^q(\mathbb{R}) \not\subset L^p(\mathbb{R}).$$ $\boxed{6}$

Aufgabe 4: Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f(x) := \begin{cases} x/e, & 0 \leq x \leq e \\ 1/\log x, & x > e \\ -f(-x), & x < 0 \end{cases}$$

zwar zu $C_0(\mathbb{R})$ gehört, aber nicht Fourier-Transformierte einer $L^1(\mathbb{R})$-Funktion ist (vgl. Sie auch mit Übung 3, Aufgabe 3).
Hinweis: Lit. A II 1 (Goldberg), p.8 $\boxed{10}$

Aufgabe 5:

a) Berechnen Sie die Fourier-Transformierte der **charakteristischen Funktion** $\kappa : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$ mit

$$\kappa_{[a,b]}(x) := \begin{cases} 1, & a \leq x \leq b \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

für $a \leq b$. Dabei bedeutet $a \leq b$ für $a = (a_1, \ldots, a_n)$, $b = (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$, dass $a_i \leq b_i$ für $i = 1, \ldots, n$ ist. $\boxed{2}$

b) Folgern Sie, dass es Funktionen $f \in L^1(\mathbb{R})$ gibt mit $f^\wedge \notin L^1(\mathbb{R})$. $\boxed{2}$

$\boxed{\boxed{44}}$