Lehrstuhl A für Mathematik

Prof. Dr. R. L. Stens, Tel.: 80-94532

Dipl.-Math. A. Haß, Tel.: 80-94526

Aachen, den 17.05.2002

5. Übung zur Fourier-Analysis I

(Abgabe: 31.05.2002 vor der Übung)

Hinweis zu dieser Übung: Man betrachte die Beweise zu Lemma I 41, Satz I 43 und Folgerung I 51 und führe an geeigneten Stellen „gleichmäßige“ Verallgemeinerungen durch.

Aufgabe 1: Seien $-\infty < a < b < \infty$, $f \in L^1_{2\pi}$ und $g \in L^\infty(a,b)$. Zeigen Sie, dass für $\rho \in \mathbb{R}$

$$h_\rho(x) := \int_a^b f(x-u)g(u)\sin \rho u \, du$$

eine stetige, 2π-periodische Funktion ist und dass gilt (vgl. Lemma I 41)

$$\lim_{\rho\to\infty} \|h_\rho\|_{C_{2\pi}} = 0.$$

$\boxed{7}$

Aufgabe 2:

a) Seien $f \in L^1_{2\pi}$ und $c(x) \in L^\infty[a,b]$ für ein Intervall $[a,b] \subset \mathbb{R}$. Zeigen Sie die Äquivalenz der beiden folgenden Aussagen (vgl. Satz I 43).

(i) $\lim_{m\to\infty} \|S_m f - c\|_{L^\infty[a,b]} = 0.$

(ii) Es existiert ein $0 < \delta < \pi$, so dass

$$\lim_{m\to\infty} \left\| \int_0^\delta [f(\cdot + u) + f(\cdot - u) - 2c(\cdot)] \frac{\sin mu}{u} \, du \right\|_{L^\infty[a,b]} = 0.$$

$\boxed{14}$

b) Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum_{k=1}^\infty \frac{\sin kx}{k}$ auf jedem kompakten Intervall $I \subset (0, 2\pi)$ gleichmäßig konvergiert. $\boxed{5}$

Aufgabe 3: Sei $f \in L^1_{2\pi}$ und $f \in C[a,b] \cap BV[a,b]$ für ein Intervall $[a,b] \subset \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass für jedes kompakte Intervall $[c,d] \subset (a,b)$ gilt (vgl. Folgerung I 51)

$$\lim_{m\to\infty} \|S_m f - f\|_{C[c,d]} = 0.$$

$\boxed{14}$

Hinweis: Entgegen dem Vorgehen in der Vorlesung zerlege man zunächst f in zwei monotone Funktionen und nutze dann die (im „Parameter“ x gleichgradige) Stetigkeit und die (gleichmäßige) Riemann’sche Lokalisationsbedingung (vgl. Aufgabe 2).

Aufgabe 4: Geben Sie eine Funktion $f \in L^1_{2\pi}$ und einen Punkt $x_0 \in \mathbb{R}$ an, so dass f in x_0 die Bedingung des Riemann'schen Lokalisationsprinzips nicht erfüllt. $\boxed{8}$

Hinweis: Betrachten Sie die 2π-periodische Fortsetzung von

$$f(x) := \begin{cases} \frac{1}{2}\log|x| & x \in [-\pi, \pi) \setminus \{0\}, \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

im Punkt $x_0 = 0$, und benutzen Sie ohne Beweis, dass $\lim\limits_{x\to\infty} \int_0^x \frac{\sin u}{u} du = \pi/2$ gilt.

$\boxed{48}$