Lehrstuhl A für Mathematik
Prof. Dr. R. L. Stens, Tel.: 80-94532
Dipl.-Math. A. Haß, Tel.: 80-94526

Aachen, den 26.04.2002

2. Übung zur Fourier-Analysis I

(Abgabe: 03.05.2002 vor der Übung)

Aufgabe 1: Sei H ein Hilbert-Raum, $(\varphi_k)_{k=1}^{\infty}$ ein totales Orthonormalsystem und $Y \subset H$ ein linearer Unterraum. Eine Folge $\psi = (\psi_k)_{k=1}^{\infty} \in s$ heißt **Multiplikator vom Typ (Y, H)**, falls für jedes $f \in Y$ ein $g \in H$ existiert mit

$$\psi_k(f, \varphi_k) = (g, \varphi_k) \qquad (k \in \mathbb{N}). \tag{1}$$

Man zeige für einen Multiplikator ψ vom Typ (Y, H):

a) Zu f aus Y existiert genau ein $g \in H$, so daß (1) gilt. Infolgedessen ist der Operator $T^\psi : Y \to H$ mit $T^\psi f := g$ wohldefiniert auf Y. $\boxed{1}$

b) Zeigen Sie für $Y = H$: T^ψ ist genau dann beschränkt, wenn $\psi \in l^\infty$. Falls $\psi \in l^\infty$, so gilt $\|T^\psi\|_{[H]} = \|\psi\|_{l^\infty}$. $\boxed{9}$

Dabei ist s die Menge aller Folgen $\{\phi_k\}_{k=1}^{\infty}$ und $l^\infty := \{\psi \in s : \sup_{k\in\mathbb{N}} |\psi_k| < \infty\}$ mit

$$\|\psi\|_{l^\infty} := \sup_{k\in\mathbb{N}} |\psi_k| \quad \text{für } \psi \in l^\infty.$$

Aufgabe 2:

a) Man zeige für den **Kern von Dirichlet** (Dirichlet: 1805-1859)

$$D_m(x) := \sum_{k=-m}^{m} e^{ikx}, \qquad (m \in \mathbb{P}, x \in \mathbb{R}) :$$

$$D_m(x) = 1 + 2\sum_{k=1}^{m} \cos kx = \begin{cases} \dfrac{\sin(2m+1)\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}, & x \neq 2\pi j \\ 2m+1, & x = 2\pi j \end{cases} \qquad (j \in \mathbb{Z}).$$

$\boxed{5}$

b) Man zeige für den **Kern von Fejér** (Fejér: 1880–1959):

$$F_m(x) := \sum_{k=-m}^{m} \Big(1 - \frac{|k|}{m+1}\Big) e^{ikx} = \begin{cases} \dfrac{1}{m+1}\left(\dfrac{\sin\frac{m+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}\right)^2, & x \neq 2\pi j \\ m+1, & x = 2\pi j \end{cases} \qquad (j \in \mathbb{Z}).$$

$\boxed{7}$

Aufgabe 3: Man zeige für die Fourier-Koeffizienten einer Funktion $f \in L^1_{2\pi}$:

a) $[f(\cdot + h)]^\wedge(k) = e^{ikh} f^\wedge(k) \quad (k \in \mathbb{Z},\, h \in \mathbb{R})$.

b) $[e^{-ij\cdot} f(\cdot)]^\wedge(k) = f^\wedge(k+j) \quad (k, j \in \mathbb{Z})$.

c) $[\overline{f}(-\cdot)]^\wedge(k) = \overline{f^\wedge(k)} = [\overline{f}]^\wedge(-k) \quad (k \in \mathbb{Z})$.

d) Ist f reellwertig, dann auch $S_m(f;x)$ für alle $m \in \mathbb{P}$ und $x \in \mathbb{R}$. $\boxed{4}$

Aufgabe 4: Man bestimme die (trigonometrischen) Fourier-Koeffizienten folgender Funktionen (jeweils 2π-periodisch fortgesetzt).

a) **Euler-Spline** (Euler: 1707–1783)

$$f_1(x) := \operatorname{sgn}(\sin x) \quad (x \in [0, 2\pi])\,;$$

dabei ist die **Signum-Funktion** definiert als $\operatorname{sgn} x := \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0. \end{cases}$ $\boxed{2}$

b) **Bernoulli-Spline** (Jakob I Bernoulli: 1654–1705)

$$f_2(x) := \begin{cases} \dfrac{\pi - x}{2}, & 0 < x < 2\pi \\ 0, & x = 0\,. \end{cases}$$

$\boxed{5}$

c) $f_3(x) := |\sin x| \quad (x \in [-\pi, \pi])$. $\boxed{7}$

$\boxed{\boxed{40}}$