LEHRSTUHL A FÜR MATHEMATIK

Prof. Dr. R. L. Stens, Tel.: 80-94532

Dipl.-Math. A. Haß, Tel.: 80-94526

Aachen, den 05.07.2002

# 11. Übung zur Fourier-Analysis I

(Abgabe: 12.07.2002 vor der Übung)

**Aufgabe 1:**

a) Zeigen Sie für den in Übung 9, Aufgabe 2b) eingeführten Cesàro-Faktor $\Theta^C$:

$$\left[(\Theta^C)^\wedge(\cdot)\right]^\wedge(s) = 2\pi\Theta^C(s).$$ 3

b) Zeigen Sie unter Verwendung von Übung 9, Aufgabe 2b) und Teil a), dass zu gegebenen reellen Zahlen $a < b$ und $\varepsilon > 0$ eine Funktion $g \in L^1(\mathbb{R})$ existiert mit

$g^\wedge(t) = 1$ für $a \le t \le b$,
$g^\wedge(t) = 0$ für $t \le a - \varepsilon$ oder $t \ge b + \varepsilon$
und linear auf $[a-\varepsilon, a]$ und $[b, b+\varepsilon]$. 6

**Hinweis**: Lit. A II 1 (Goldberg), pp. 21-24

**Aufgabe 2:**

a) Seien $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ und $g^\wedge(v) = 0$ für $|v| \ge 1$. Zeigen Sie, dass $[f * g]^\wedge(v) = 0$ ist für $|v| \ge 1$ (vgl. Lemma I 35 d)). 1

b) Seien $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ und $f(x) = 0$ für $|x| \ge a$ und $g(x) = 0$ für $|x| \ge b$. Zeigen Sie, dass dann $(f * g)(x) = 0$ ist für $|x| \ge a + b$. 2

c) Zeigen Sie, dass Funktionen $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ existieren mit $f(x) \ne 0$, $g(x) \ne 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und

$$(f * g)^\wedge(v) = 0 \quad (v \in \mathbb{R}).$$

**Hinweis**: Betrachten Sie die Funktionen $f(x) := \left[\Theta^C\right]^\wedge(x) + \left[\Theta^C\right]^\wedge(x+\pi)$ und $g(x) = e^{-2ix} f(x)$. 5

**Aufgabe 3:** Sei $(c_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ eine ungerade (d.h. $c_k = -c_{-k}$) Folge von reellen Zahlen mit $c_1 \ge c_2 \ge \cdots \ge 0$ und $\lim_{|k|\to\infty} c_k = 0$. Zeigen Sie: $\sum_{k=1}^{\infty} c_k \sin kx$ ist Fourier-Reihe einer Funktion $g \in L^1_{2\pi}$ genau dann, wenn $\sum_{k=1}^{\infty} (-\Delta c_k) \log k < \infty$.

**Hinweis**: Benutzen Sie Übung 10, Aufgabe 3 (vgl. Lit. A II 4 (Edwards I), pp. 115-116). 10

**Aufgabe 4:** Beweisen Sie folgende Aussagen:

a) $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\cos kx}{\log k}$ ist die Fourier-Reihe einer Funktion aus $L^1_{2\pi}$. $\boxed{4}$

b) $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\sin kx}{\log k}$ ist nicht die Fourier-Reihe einer Funktion aus $L^1_{2\pi}$. $\boxed{2}$

**Aufgabe 5:** Sei $(c_k)_{k=-\infty}^{\infty}$ eine gerade, beschränkte Folge, so dass $(c_k)_{k=0}^{\infty}$ **konvex** ist, d.h., $\Delta^2 c_k \geq 0$ für $k \in \mathbb{P}$.

a) Zeigen Sie:

(i) $\Delta c_k \leq 0$ für alle $k \in \mathbb{P}$,

(ii) $\lim_{k\to\infty} k\Delta c_k = 0$,

(iii) $(c_k)_{k=0}^{\infty}$ ist quasikonvex. $\boxed{6}$

b) Sei $(c_k)_{k=0}^{\infty}$ zusätzlich eine Nullfolge. Beweisen Sie, dass dann eine gerade, positive Funktion $g \in L^1_{2\pi}$ existiert mit $g^\wedge(k) = c_k$ für alle $k \in \mathbb{Z}$. $\boxed{2}$

**Definition:** *Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein beliebiges (beschränktes oder unbeschränktes) Intervall. Eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ heißt* **konvex**, *falls*

$$f(\lambda x + (1-\lambda) y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y) \qquad (x, y \in I,\ \lambda \in [0,1]) .$$

**Aufgabe 6:** Sei $f \in L^1_{2\pi}$ konvex auf $(0, 2\pi)$. Zeigen Sie, dass für die Fourier-Cosinus-Koeffizienten $a_k(f) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(u)\cos ku\, du$ gilt: $a_k \geq 0,\ k \in \mathbb{N}$.
**Hinweis:** Lit. A I 4 (Hardy-Rogosinski), p.25 $\boxed{7}$

$\boxed{\boxed{48}}$