Lehrstuhl A für Mathematik
Prof. Dr. R. L. Stens, Tel.: 80-94532
Dipl.-Math. A. Haß, Tel.: 80-94526

Aachen, den 16.04.2002

1. Übung zur Fourier-Analysis I

(Abgabe: 26.04.2002 vor der Übung)

Übungen: Die Übungsblätter werden wöchentlich herausgegeben. Sie sind auch im Internet erhältlich unter

http://www.mathA.rwth-aachen.de/lehre/SS02/Fourieranalysis

Die Homepage des Lehrstuhls A für Mathematik finden Sie unter

http://www.mathA.rwth-aachen.de

Scheinbedingungen: Maximal zwei Personen dürfen eine gemeinsame Lösung abgeben (Namen und Matrikelnummern nicht vergessen!). Diplomkandidaten erhalten einen Übungsschein und Lehramtskandidaten einen qualifizierten Studiennachweis, falls mindestens 50% der Übungspunkte erreicht werden. Als Lehramtskandidat können Sie einen Leistungsnachweis erwerben, indem Sie zusätzlich an einer mündlichen Prüfung erfolgreich teilnehmen.

Termine:
Vorlesung: Mo 13.30 – 15.00 Uhr, Hörsaal III, Di 10.00 – 11.30 Uhr, Hörsaal III
Übung: Fr 12.00 – 13.30 Uhr, Hörsaal III, Beginn 26.04.2002
Diskussion: nach Vereinbarung

Aufgabe 1: Zeigen Sie: In einem Prä-Hilbert-Raum H gilt die **Schwarz-Ungleichung**:

$$|(f,g)| \leq \sqrt{(f,f)}\sqrt{(g,g)} \quad (f,g \in H).$$

Es gilt genau dann Gleichheit, falls f und g linear abhängig sind, d.h. falls $g = \alpha f$ für ein $\alpha \in \Phi$ ist oder $f = 0$. $\boxed{8}$

Aufgabe 2: Sei H ein Prä-Hilbert-Raum. Dann gilt:

a) Durch $\|f\|_H := \sqrt{(f,f)}$ wird auf H eine Norm definiert. $\boxed{3}$

b) Für diese Norm gilt die **Parallelogramm-Identität**:

$$\|f+g\|_H^2 + \|f-g\|_H^2 = 2(\|f\|_H^2 + \|g\|_H^2) \quad (f,g \in H).$$ $\boxed{2}$

Aufgabe 3: Man zeige: $l^2(\mathbb{N})$ ist ein Hilbert-Raum unter dem Skalarprodukt

$$(c,d) := \sum_{k=1}^{\infty} c_k \overline{d}_k \quad (c,d \in l^2(\mathbb{N})).$$

$\boxed{10}$

Aufgabe 4:

a) Es seien Q eine beliebige, nicht-leere Menge und $l^2(Q)$ die Klasse aller komplexwertigen Funktionen f, die auf Q definiert sind und die folgende Eigenschaften haben:

(i) $\{q \in Q : f(q) \neq 0\}$ ist endlich oder abzählbar unendlich,

(ii) $\sum_{q \in Q} |f(q)|^2 < \infty$.

Definiert man auf $l^2(Q)$ ein inneres Produkt durch

$$(f,g) := \sum_{q \in Q} f(q)\,\overline{g(q)},$$

so wird $l^2(Q)$ zu einem Hilbert-Raum. Dabei sind Addition und skalare Multiplikation auf $l^2(Q)$ wie bei Funktionen üblich, d.h. punktweise, definiert.

Hinweis: Man führe die Vollständigkeit von $l^2(Q)$ auf die von $l^2(\mathbb{N})$ zurück (auch, falls Q überabzählbar ist). $\boxed{12}$

b) Man beweise: Die Menge

$$P = \{(f_k)_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{C} : f_k \neq 0 \text{ höchstens endlich oft}\}$$

wird durch die Definition

$$(f,g) := \sum_{k=1}^{\infty} f_k\,\overline{g_k}$$

mit $f = (f_k)_{k=1}^{\infty}, g = (g_k)_{k=1}^{\infty} \in P$ zu einem Prä-Hilbert-Raum, wobei Addition und skalare Multiplikation wie üblich elementweise erklärt sind. Dieser Raum ist nicht vollständig. Warum besteht kein Widerspruch zu der in Teil a) bewiesenen Vollständigkeit von $l^2(Q)$?

Hinweis: Man betrachte die über $f^{(n)} = (1, 1/2, \ldots, 1/n, 0, 0, \ldots)$ definierte Folge $(f^{(n)})_{n=1}^{\infty} \subset P$. $\boxed{5}$

Aufgabe 5: Sei $f \in L^1_{2\pi}$. Dann gilt für alle $x_0 \in \mathbb{R}$:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(u)du = \int_{x_0-\pi}^{x_0+\pi} f(u)du\ .$$

$\boxed{3}$

$\boxed{43}$