LEHRSTUHL A FÜR MATHEMATIK Aachen, den 19. Juli 2002
Prof. Dr. E. Görlich,
Dipl.-Math. T. Heck, I. Klöcker

12. Übung zur Analysis II

Abgabe: Freitag, 16. August 2002, bis 13:30 Uhr im Kasten vor Raum 155, Hauptgebäude

1. Scheinklausur: Die 1. Klausur findet nicht erst am auf dem letzten Übungsblatt angekündigten Termin, sondern doch schon heute statt (15:00 Uhr, Roter Hörsaal).
Die Rückgabe der Klausur ist am Montag, dem 22. 07., um 14:00 Uhr im Hörsaal IV.

2. Scheinklausur: Die 2. Klausur findet am Montag, dem 26. 08. 2002, um 10:15 Uhr im Grünen Hörsaal statt.
Auch diesmal ist eine Anmeldung zur Klausur notwendig. Einfach bis zum **23. 08. 2002** eine E-Mail mit Namen und Matrikelnummer an ana2klausur2@matha.rwth-aachen.de schicken oder sich in der im Sekretariat ausliegenden Liste eintragen.
Die Rückgabe der Klausur ist am 30. 08. um 11:30 Uhr in Hörsaal IV.

Vordiploms-/Zwischenprüfungsklausur: Die Klausur zur Analysis I/II findet statt am 06. 09. 2002 um 09:30 Uhr im Roten und im Grünen Hörsaal statt. Aufteilung: Vordiplomkandidaten mit Matrikelnummern **kleiner 233 000** und Lehramtskandidaten in Hörsaal Ro, die Übrigen in Hörsaal Gr.
Die Einsicht in die Klausur ist am 11. 09. um 10:00 Uhr in Hörsaal IV.

Feriendiskussionen: Am 30. 08. sowie am 02.–04. 09. finden jeweils um 10:00 Uhr im Hörsaal IV zusätzliche Diskussionstermine zur Vorbereitung auf die Vordiplomsklausur statt.

Aufgabe 1 (5^* Punkte) Beweisen Sie, dass es genau eine stetige Funktion $f:[0;1]\to\mathbb{R}$ gibt, die

$$\sup_{x\in[0;1]} |f(x)| \le \frac{1}{3} \qquad \text{und} \qquad f(x)^2 - f(x) - \frac{1}{4}x = 0 \quad \text{für alle } x\in[0;1]$$

erfüllt.

Aufgabe 2 (4^* Punkte) Nach welchen Variablenpaaren lässt sich nach dem Satz über implizite Funktionen das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \sinh x + \arctan(yz) + w &= 1 \\ \tfrac{1}{2}z^2 + y &= 2 \end{aligned}$$

in einer Umgebung des Punktes $(x_0,y_0,z_0,w_0)^t = (0,2,0,1)^t$ auflösen?

Aufgabe 3 ($(2+6+2)^*$ Punkte) Es sei $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ mit $f((x,y,z)^t) = x+2y-z$ für alle $(x,y,z)^t\in\mathbb{R}^3$ und es sei

$$M = \left\{ (x,y,z)^t \in \mathbb{R}^3; x^2+y^2+z^2 \le \frac{3}{2} \right\}.$$

a) Zeigen Sie, dass f auf M und ∂M Maximum und Minimum annimmt.

b) Berechnen Sie das Maximum und Minimum von f auf dem Rand von M.

c) Sind dies auch globale Minima und Maxima?

Hinweis: Betrachten Sie bei b) eine geeignete Nebenbedingung.

Aufgabe 4 (3^* Punkte) Berechnen Sie das Integral $\int_\gamma f\,dx$ für

$$\gamma : [0;1] \to \mathbb{R}\ , t \mapsto \begin{pmatrix} \sqrt{t+1}\cos \pi t \\ \sqrt{t^2+1} \end{pmatrix} \text{ und } \quad f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\ , \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \frac{2x}{1+(x^2+y^2)^2} \\ \frac{2y}{1+(x^2+y^2)^2} \end{pmatrix} .$$

Hinweis: Zeigen Sie zuerst, dass f ein Gradientenfeld ist.

Aufgabe 5 ($(2+2)^*$ Punkte) Berechnen Sie die Bogenlängen der Kurven

a) $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^3, \quad t \to \left(t, t^2, \frac{2t^3}{3}\right)^t$;

b) $\gamma : [0,b] \to \mathbb{R}^3, \quad t \to (\cosh^2 t, \sinh^2 t, \sqrt{2}t)^t, b > 0$.

Aufgabe 6 ($(3+2)^*$ Punkte) Sei die Gleichung

$$y^2 + xz + z^2 - e^z - 4 = 0$$

gegeben.

a) Zeigen Sie, dass sich diese Gleichung in einer Umgebung von $(0,e,2)$ nach der Variablen z auflösen lässt. Wir nennen diese Funktion g.

b) Berechnen Sie $\frac{\partial g}{\partial x}(0,e)$ und $\frac{\partial g}{\partial y}(0,e)$.