LEHRSTUHL A FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. E. Görlich,
Dipl.-Math. T. Heck, I. Klöcker

Aachen, den 10. Juli 2002

11. Übung zur Analysis II

Abgabe: Freitag, 19. Juli 2002, bis 13:30 Uhr im Kasten vor Raum 155, Hauptgebäude

1. Scheinklausur: Die Klausur findet statt am Freitag, dem 19.07.20092, um 15:00 Uhr im Roten Hörsaal.
Um unnötige Papierverschwendung zu vermeiden, gibt es diesmal eine Anmeldung zur Klausur. Einfach bis **Mittwoch, 17. Juli**, eine E-Mail mit Namen und Matrikelnummer an ana2klausur1@matha.rwth-aachen.de schicken oder sich in der im Sekretariat ausliegenden Liste eintragen.

Aufgabe 1 (3+3 Punkte) Untersuchen Sie die folgenden Funktionen auf lokale Extrema und bestimmen Sie diese:

1. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad \binom{x}{y} \to x \log(x+y) - y \quad$ für $x+y > 0$;

2. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad \binom{x}{y} \to (x^2+y^2)e^{x^2-y^2}$.

Aufgabe 2 (3 Punkte) Gegeben seien Punkte $x_j := (x_{j1}, \ldots, x_{jn})^t \in \mathbb{R}^n, 1 \leq j \leq m$ für ein $m \in \mathbb{N}$.
Man bestimme den Punkt $y := (y_1, \ldots, y_n)^t \in \mathbb{R}^n$, für den die Summe

$$\sum_{j=1}^{m} \|y - x_j\|_2^2$$

den minimalen Wert annimmt.

Aufgabe 3 (4 Punkte) Ermitteln Sie die absoluten Extrema der durch

$$f(x,y,z) = x \cdot y \cdot z$$

definierten Funktionen $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ unter den Nebenbedingungen

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1 \quad \text{und} \quad x + y + z = 1.$$

Geben Sie die Stellen an, in denen das Maximum bzw. das Minimum angenommen wird.

Aufgabe 4 (4+3* Punkte) Es sei für $x, y, z \in \mathbb{R}$ das Gleichungssystem

$$\begin{cases} xe^x + ye^y + ze^z + xyz &= 0 \\ x - y + z &= 0 \end{cases} \tag{*}$$

gegeben. Zeigen Sie: Es gibt offene Umgebungen U von 0 in $\mathbb{R}$, und V von $(0,0)$ in $\mathbb{R}^2$ sowie zweimal stetig differenzierbare Funktionen $v : U \to \mathbb{R}$, $w : U \to \mathbb{R}$, so dass $(*)$ in $U \times V$ äquivalent ist mit dem Gleichungssystem

$$y = v(x), \quad z = w(x).$$

Berechnen Sie v' und w' in $x = 0$.
Zusatzaufgabe: Berechnen Sie w'' in $x = 0$.