LEHRSTUHL A FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. E. Görlich,
Dipl.-Math. T. Heck, I. Klöcker

Aachen, den 3. Juli 2002

10. Übung zur Analysis II

Abgabe: Freitag, 12. Juli 2002, bis 13:30 Uhr im Kasten vor Raum 155, Hauptgebäude

Anmeldung zur 1. Scheinklausur: Um unnötige Papierverschwendung zu vermeiden, gibt es diesmal eine Anmeldung zur Klausur. Einfach eine E-Mail mit Namen und Matrikelnummer an ana2klausur1@matha.rwth-aachen.de schicken oder sich in der im Sekretariat ausliegenden Liste eintragen.

Aufgabe 1 (3+4 Punkte) Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $a \in U$. Zeigen Sie:

a) Sind $f, g : U \to \mathbb{R}^m$ zwei in a total differenzierbare Funktionen und ist $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann sind auch $f + g$ und αf in a total differenzierbar mit

$$\begin{aligned} &(D(f+g))(a) = (Df)(a) + (Dg)(a) \quad \text{und} \\ &(D(\alpha f))(a) = \alpha(Df)(a). \end{aligned}$$

b) Sind $f : U \to \mathbb{R}$ und $g : U \to \mathbb{R}^m$ in a total differenzierbare Funktionen. Dann ist auch $f \cdot g$ in a total differenzierbar mit

$$(D(f \cdot g))(a) = f(a)(Dg)(a) + g(a)(Df)(a).$$

Aufgabe 2 (2 Punkte) Zeigen Sie, dass es keine stetig differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit

$$(Df)((x,y,z)^t) = (y^2 z, 2xyz, xy^2 + y)$$

für alle $(x,y,z)^t \in \mathbb{R}^3$ gibt.

Aufgabe 3 (3 Punkte) Sei $D := \{\binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2; x, y > 0\}$. Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f : D \to \mathbb{R}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \arctan\left(\frac{x}{y}\right) + \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

auf D konstant gleich $\frac{\pi}{2}$ ist.

Aufgabe 4 (3+4 Punkte)

a) Entwickeln Sie die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto xy^2 + 3x^2 y + x + 2,$$

in eine Taylorreihe um den Punkt $\binom{1}{2}$.

b) Berechnen Sie die Taylorentwicklung von

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \exp(x^2 + y)$$

im Nullpunkt, wobei das Restglied aus den dritten partiellen Ableitungen gebildet sei, und schätzen Sie dieses Restglied für $\|\binom{x}{y}\|_2 \leq 1$ durch Potenzen von x und y ab.

Aufgabe 5 (4 Punkte) Untersuchen Sie die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto x^2 \left(e^{x^2+y^2} - \cos y \right)$$

auf lokale Extrema und bestimmen Sie diese.

Aufgabe 6 (3+1 Punkte) Sei $K := \{ \binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 ; \| \binom{x}{y} \|_2 \leq 1 \}$ und sei $f : K \to \mathbb{R}, \binom{x}{y} \mapsto y^3 + xy - x^3$.

a) Zeigen Sie, dass f im Inneren von K kein lokales Maximum besitzt.

b) Hat f ein globales Maximum auf dem Rand von K?