LEHRSTUHL A FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. E. Görlich,
Dipl.-Math. T. Heck, I. Klöcker

Aachen, den 26. Juni 2002

9. Übung zur Analysis II

Abgabe: Freitag, 5. Juli 2002, bis 13:30 Uhr im Kasten vor Raum 155, Hauptgebäude

Aufgabe 1 (5 Punkte) Sei

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{cases} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \binom{x}{y} \neq \binom{0}{0} \\ 0 & \binom{x}{y} = \binom{0}{0} \end{cases}.$$

Berechnen Sie $\lim\limits_{(x,y)^t \to (0,0)^t} f((x,y)^t)$ längs der Wege

a) $y = ax$, $a \in \mathbb{R}$,

b) $y = bx^2$, $b \in \mathbb{R}$,

c) $y^2 = 2cx$, $c \in \mathbb{R}$, $c \neq 0$.

Ist f stetig im Nullpunkt?

Aufgabe 2 ((2+2)+2 Punkte)

a) Berechnen Sie grad f von

(i) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $(x,y,z)^t \mapsto \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ und

(ii) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $(r,\varphi,\theta)^t \mapsto r\cos\varphi\sin\theta$.

b) Berechnen Sie die ersten partiellen Ableitungen von

$$f : \{(x,y,z)^t \in \mathbb{R}^3; x,y,z > 0\} \to \mathbb{R}, (x,y,z)^t \mapsto (xy)^z.$$

Aufgabe 3 (3 Punkte) Prüfen Sie, welche (ersten) partiellen Ableitungen der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{x^2+y^2} & (x,y)^t \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)^t\} \\ 0 & (x,y)^t = (0,0)^t, \end{cases}$$

existieren, und berechnen Sie sie gegebenenfalls.

Aufgabe 4 (4 Punkte) Zeigen Sie, dass die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, gegeben durch

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & (x,y)^t \neq (0,0)^t \\ 0 & (x,y)^t = (0,0)^t, \end{cases}$$

im Nullpunkt total differenzierbar ist, die ersten partiellen Ableitungen dort aber unstetig sind.

Aufgabe 5 (3 Punkte) Zeigen Sie, dass die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$f(x,y) := \log(x^2+y^2) \quad \text{für } (x,y)^t \neq 0,$$

auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ harmonisch ist.

Aufgabe 6 (4 Punkte) Sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{(x^2+y^2)^2}{y} & y \neq 0 \\ 0 & y = 0. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass alle Richtungsableitungen im Nullpunkt verschwinden, f aber im Nullpunkt unstetig ist. Ist f im Nullpunkt total differenzierbar?