LEHRSTUHL A FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. E. Görlich,
Dipl.-Math. T. Heck, I. Klöcker

Aachen, den 21. Juni 2002

8. Übung zur Analysis II

Abgabe: Freitag, 28. Juni 2002, bis 13:30 Uhr im Kasten vor Raum 155, Hauptgebäude

Hinweis. Bitte beachten Sie, dass heute (Freitag, 21. 06.) um 15:45 Uhr im Hörsaal II statt der Übung eine Vorlesung stattfindet. Außerdem findet am Montag, 24. 06., um 10:00 Uhr im Hörsaal II eine zusätzliche Vorlesung statt.

Aufgabe 1 (7×2 Punkte) Untersuchen Sie für die folgenden Beispiele, ob es sich um normierte Vektorräume handelt. Falls dies der Fall ist, überprüfen Sie, ob die Vektorräume Banachräume sind.

a) $(C^1([a,b]), \|\cdot\|_\infty)$, wobei $\|f\|_\infty := \sup_{x\in[a,b]}|f(x)|$.

b) $(C^1([a,b]), \|\cdot\|)$, wobei $\|f\| := \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$.

c) $(C[a,b], \|\cdot\|_1)$, wobei $\|f\|_1 := \int_a^b |f(t)|\, dt$.

d) $(c_0, \|\cdot\|_\infty)$, wobei $c_0 := \{x = (x_n)_{n\geq 1};\ x$ relle Nullfolge$\}$ und $\|x\|_\infty := \sup_{n\in\mathbb{N}}|x_n|$.

e) $(l^p, \|\cdot\|_p), 1 \leq p < \infty$, mit $l^p := \{x = (x_n)_{n\geq 1};\ x_n \in \mathbb{R}, \sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^p < \infty\}$ und $\|x\|_p := \left(\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^p\right)^{1/p}$.

f) $(l^\infty, \|\cdot\|_\infty)$, wobei $l^\infty := \{x = (x_n)_{n\geq 1};\ x_n \in \mathbb{R}, |x|_\infty := \sup_{n\in\mathbb{N}}|x_n| < \infty\}$.

g) $(l^p, \|\cdot\|_\infty)$, $1 \leq p < \infty$, mit l^p wie in e) und $\|\cdot\|_\infty$ wie in f).

Aufgabe 2 (4+4 Punkte) Untersuchen Sie die folgenden Funktionen auf Stetigkeit in $\binom{x_0}{y_0} \in \mathbb{R}^2$.

a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{cases} 1 & \text{falls } x \leq 0, y \in \mathbb{R}, \\ x^{y^2} & \text{falls } x > 0, y \in \mathbb{R}. \end{cases}$

b) $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{cases} \dfrac{x^2|y|^3}{x^2 - xy + y^2} & \text{falls } \binom{x}{y} \neq \binom{0}{0}, \\ 0 & \text{falls } \binom{x}{y} = \binom{0}{0}. \end{cases}$

Aufgabe 3 (3 Punkte) Zeigen Sie mit Hilfe des Banachschen Fixpunktsatzes, dass die Gleichung $\cos(x) = 2x$ auf dem Intervall $[0, \frac{\pi}{2}]$ genau eine Lösung hat.

Aufgabe 4 (3 Punkte) Zeigen Sie explizit, d.h. unter Verwendung der Definition, dass die Menge

$$M := \{x \in \mathbb{R}^3;\ \|x\|_2 < \sqrt{3} \text{ und } \|x\|_\infty \leq 1\}$$

nicht kompakt ist.

Aufgabe 5 (2 Punkte) Zeigen Sie, dass die Aussage von Folgerung IX(4.4) im Allgemeinen falsch ist, wenn man nicht die Kompaktheit einer der beiden Mengen fordert. Geben Sie dazu im Raum $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$ zwei abgeschlossene, nichtleere Teilmengen A und B mit $A \cap B = \emptyset$ und $d(A,B) = 0$ an.