LEHRSTUHL A FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. E. Görlich,
Dipl.-Math. T. Heck, I. Klöcker

Aachen, den 05. Juni 2002

7. Übung zur Analysis II

Abgabe: Freitag, 14. Juni 2002, bis 13:30 Uhr im Kasten vor Raum 155, Hauptgebäude

Aufgabe 1 (3 Punkte) Es sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Funktionen, die auf $[0,\infty)$ gleichmäßig gegen f konvergiert. Die Funktionen f_n und f seien uneigentlich integrierbar in $[0,\infty)$. Gilt dann

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty f_n(x)\,dx = \int_0^\infty f(x)\,dx \quad ?$$

Aufgabe 2 (2+2 Punkte) Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{R}$, $V \neq \{0\}$.

a) Gibt es eine Norm $\|\cdot\|_t$ auf V, so dass die leere Menge und V die einzigen offenen Mengen in $(V,\|\cdot\|_t)$ sind?

b) Gibt es eine Norm $\|\cdot\|_d$ auf V, so dass alle Teilmengen von V offene Mengen in $(V,\|\cdot\|_d)$ sind?

Aufgabe 3 (3+3 Punkte) Sei $(V,\|\cdot\|)$ ein normierter Vektorraum über $\mathbb{R}$.

a) Sei A eine nichtleere Teilmenge von V. Für ein $x\in V$ definiert man den Abstand von x zu A durch $d(x,A) := \inf_{a\in A}\|x-a\|$. Zeigen Sie:

$$x\in\overline{A} \quad\Leftrightarrow\quad d(x,A)=0.$$

b) Für ein $f\in V$ bezeichne $\mathcal{U}_f$ die Menge aller Umgebungen von f. Beweisen Sie:

$$\{f\} = \bigcap_{U\in\mathcal{U}_f}\overline{U}.$$

Aufgabe 4 (2+3 Punkte)

a) Zeigen Sie, dass $V := \{(x_j)_{j\geq 1} \text{ mit } x_j\in\mathbb{R};\ \sum_{j=1}^{\infty}|x_j|^p \text{ konvergent}\}$ versehen mit $\|x\|_p := \left(\sum_{j=1}^{\infty}|x_j|^p\right)^{1/p}$ für $p\geq 1$ ein normierter Vektorraum ist.

b) Gegeben sei $V := \{f:[0,1]\to\mathbb{R};\ f \text{ ist stetig differenzierbar auf } [0,1]\}$. Prüfen Sie, mit welchen der Abbildungen

(i) $\|f\|_a := \|f\|_\infty$,
(ii) $\|f\|_b := \|f'\|_\infty$,
(iii) $\|f\|_c := \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$

V einen normierten Vektorraum bildet. Hierbei ist $\|f\|_\infty := \max_{x\in[0,1]}|f(x)|$.

Aufgabe 5 (2+2 Punkte) Prüfen Sie, ob

a) $\|x\| := \|x\|_2 + \|x\|_\infty$ auf dem Vektorraum $\mathbb{R}^n$ bzw.

b) $\|f\| := \int_a^b |f(x)|\,dx$ auf dem Vektorraum V der auf $[a,b]$ Riemann-integrierbaren Funktionen

eine Norm ist.