6. Übung zur Analysis II, SS 2002

Aufgabe 1 (4+1 Punkte)

a) Sei $(f_n)_{n\geq 1}$ eine Folge stetiger Funktionen auf $D \subset \mathbb{R}$, die gleichmäßig gegen eine Funktion f auf D konvergiert. Zeigen Sie:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x_n) = f(x)$$

für jede Folge $(x_n)_{n\geq 1}$ mit $x_n \in D$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, $x \in D$.

b) Zeigen Sie:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{2^k}{k!}\left(\frac{n}{n+2}\right)^k = e^2.$$

zu a) Sei $\varepsilon > 0$, $x \in D$ und $(x_n)_n$ eine Folge in D mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$.

$f_n \underset{glm}{\longrightarrow} f \Rightarrow \exists N_1 = N_1(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, so dass

$(*)\qquad |f_n(y) - f(y)| < \varepsilon \qquad \forall y \in D,\ n \geq N_1$

f_n stetig und $f_n \underset{glm}{\rightarrow} f \Rightarrow f$ stetig, d.h. $\exists \delta = \delta(\varepsilon, x)$, so dass

$(**)\qquad |f(y) - f(x)| < \varepsilon \qquad \forall y \in D$ mit $|x-y| < \delta$

$x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x \Rightarrow \exists \overset{=N_2(\delta)}{N_2} \in \mathbb{N}$ mit

$(***)\qquad |x_n - x| < \delta \qquad \forall n \geq N_2$

Also gilt für alle $n \geq \overset{N:=}{\max}\{N_1, N_2\}$, dass

$$|f_n(x_n) - f(x)| \leq \underbrace{|f_n(x_n) - f(x_n)|}_{\underset{(*)}{<}\varepsilon} + \underbrace{|f(x_n) - f(x)|}_{\underset{(**)}{<}\varepsilon} < 2\cdot\varepsilon$$

(gilt wegen $(***)$)

$\Rightarrow$ Beh.

zu b) wähle $f_n(x) := \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$. Als Potenzreihe konv. f_n $\overset{\text{auf } [0,3]}{\text{glm.}}$ gegen $f = \exp$.

Mit $x_n := \frac{2n}{n+2}$ gilt $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 2$.

Also folgt mit a)

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{2^k}{k!}\left(\frac{n}{n+2}\right)^k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\left(\frac{2n}{n+2}\right)^k = \exp(2) = e^2.$$

6. Übung zur Analysis II, SS 2002

Aufgabe 2 (4 Punkte) Gegeben sei die Funktionenfolge $(f_n)_{n\geq 1}$ mit $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}, x \mapsto nxe^{-nx}$ für $n \in \mathbb{N}$. Berechnen Sie

$$\int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx \quad \text{und} \quad \lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx.$$

Ist f_n gleichmäßig konvergent?

$f_n(0)=0$ und für $x \in (0,1]$ gilt $f_n(x) = nxe^{-nx} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$\Rightarrow f_n \to 0$ auf $[0,1]$

Aber wegen $\|f_n - 0\|_{[0,1]} \geq |f_n(\frac{1}{n})| = e^{-1} \underset{n\to\infty}{\not\to} 0$ konv.

$(f_n)_n$ nicht glm. gegen 0.

Also ist Satz (2.6) nicht anwendbar.
Nichtsdestotrotz ist

$$\int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx = \int_0^1 0\,dx = 0$$

und

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 nxe^{-nx}\,dx$$

$$\overset{\text{P.I.}}{=} \lim_{n\to\infty} \left(\cancel{n}x \cdot \frac{-1}{\cancel{n}} \cdot e^{-nx}\Big|_0^1 - \int_0^1 n \cdot \frac{-1}{n} e^{-nx}\,dx \right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(-e^{-n} - \frac{1}{n}(e^{-n}-1)\right) = 0.$$

6. Übung zur Analysis II, SS 2002

Aufgabe 6 (4+2 Punkte)

a) Zeigen Sie, dass für alle $a, b \in \mathbb{N}$ gilt

$$\int_0^1 \frac{t^{a-1}}{1+t^b}\,dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{a+bk}.$$

Hinweis: Schreiben Sie den Integranden als geometrische Reihe.

b) Berechnen Sie (i) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}$ und (ii) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+2}$.

a) Sei $x \in (0,1)$.

$$g(x) := \int_0^x \frac{t^{a-1}}{1+t^b}\,dt = \int_0^x t^{a-1} \sum_{k=0}^{\infty} \left((-t^b)\right)^k dt$$

$$= \int_0^x \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k t^{a+bk-1}}_{=: f_k(t)} dt$$

f_k int.bar auf $\mathbb{R}$ mit $\int_0^x f_k(t)\,dt = \frac{(-1)^k}{a+bk} t^{a+bk}\Big|_0^x$

$$= \frac{(-1)^k}{a+bk} x^{a+bk} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$\sum_{k=0}^{\infty} f_k(t)$ konv. (als geom. Reihe) glm. auf $[0,x]$

$$\Rightarrow \int_0^x \frac{t^{a-1}}{1+t^b}\,dt = \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{a+bk} x^{a+bk}}_{(*)} \quad \forall x \in (0,1)$$

$(*)$ ist reelle P.R. mit KR $\rho = 1$ (geom. Reihe)

und $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{a+bk} < \infty$ (Leibniz-Krit.)

$$\overset{\text{Abelscher GW-Satz}}{\Longrightarrow} \int_0^1 \frac{t^{a-1}}{1+t^b}\,dt = \lim_{x \uparrow 1} g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{a+bk}.$$

b) (i) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} \overset{a)}{=} \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\,dt = \arctan t\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}$

6. Übung zur Analysis II, SS 2002

Aufgabe 5 (5 Punkte) Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und sei $(f_n)_{n \geq 1}$ eine Folge stetiger Funktionen auf $[a,b]$ mit $\underbrace{f_n(x) \geq f_{n+1}(x) \text{ für alle } x \in [a,b] \text{ und alle } n \in \mathbb{N}.}_{(*)}$ Außerdem konvergiere die Funktionenfolge punktweise gegen 0.
Zeigen Sie, dass die Funktionenfolge auf $[a,b]$ gleichmäßig gegen 0 konvergiert.

$f_n(x) \geq f_{n+1}(x)$ und $\lim\limits_{n \to \infty} f_n(x) = 0 \quad \forall x \in [a,b]$

$\Rightarrow f_n(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a,b], n \in \mathbb{N} \qquad (**)$

Sei $\varepsilon > 0$ bel.

<u>Zeige:</u> $\exists N \in \mathbb{N}$ mit $f_N(x) < \varepsilon \quad \forall x \in [a,b] \quad \left(\overset{(*)}{\underset{(**)}{\Rightarrow}} \text{Bel.} \right)$

<u>dazu:</u> Ang. es ex. kein solches N

$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} \; \exists \, x_n \in [a,b]$ mit $f_n(x_n) \geq \varepsilon \qquad (\Delta)$

$\overset{\text{Bolzano-}}{\underset{\text{Weierstraß}}{\Rightarrow}}$ $(x_n)_n$ besitzt konv. TF $(x_{n_k})_k$ mit $c := \lim\limits_{k \to \infty} x_{n_k}$.

Wegen $\lim\limits_{n \to \infty} f_n(c) = 0$ ex. ein $m \in \mathbb{N}$ mit $f_m(c) < \varepsilon$

$\overset{f_m \text{ stetig}}{\Rightarrow} \exists \, \delta > 0$ mit $f_m(x) < \varepsilon \quad \forall x \in [a,b]$ mit $|x - c| < \delta$

$\overset{(*)}{\Rightarrow} f_n(x) < \varepsilon \quad \forall x \in [a,b]$ mit $|x - c| < \delta, \; n \geq m. \qquad (***)$

$c = \lim\limits_{k \to \infty} x_{n_k} \Rightarrow \exists \, k_0 \in \mathbb{N} : |x_{n_k} - c| < \delta \quad \forall k \geq k_0$

$\overset{(***)}{\Rightarrow} f_{n_k}(x_{n_k}) < \varepsilon \quad \forall n_k > \max\{m, n_{k_0}\}$ ↯ zu (Δ)

6. Übung zur Analysis II, SS 2002

Aufgabe 4 (4 Punkte) Zeigen Sie, dass für alle $x \in (1,\infty)$

$$\zeta'(x) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\log k}{k^x}$$

ist und dass ζ' stetig auf $(1,\infty)$ ist.

Nach (VIII.1.13) konv. $\zeta(x)$ pktw. auf $(1,\infty)$. (*)

$$\zeta(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x), \quad f_k(x) = k^{-x} = e^{-x\cdot\log k}$$

$$f_k'(x) = (-\log k)\cdot e^{-x\cdot\log k} = -\frac{\log k}{k^x} \quad \text{stetig} \qquad (**)$$

Beh.: $\sum_{k=1}^{\infty} f_k'(x)$ konv. glm. auf $[1+\delta,\infty)$, $\delta>0$ bel. (***)

Bew.: Für $\alpha>0$ ist $\lim_{x\to\infty} \frac{\log x}{x^\alpha} = 0$

$\Rightarrow$ zu $\delta>0$ $\exists M>0$ mit $\frac{\log k}{k^{\delta/2}} \le M \quad \forall k\in\mathbb{N}$

$\Rightarrow$ Für $x \geq 1+\delta$ gilt

$$|f_k'(x)| = \frac{\log k}{k^x} \le \frac{\log k}{k^{1+\delta}} = \frac{1}{k^{1+\delta/2}}\left(\frac{\log k}{k^{\delta/2}}\right) \le \frac{M}{k^{1+\delta/2}}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{M}{k^{1+\delta/2}} < \infty \underset{\text{Majorantenkrit.}}{\overset{\text{Weierstraßsches}}{\Longrightarrow}} \text{Beh.} \ //$$

$$\underset{\text{gliedw. Diffbarkeit}}{\overset{(*),(**),(***)}{\Longrightarrow}} \zeta'(x) = \frac{d}{dx}\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) = -\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\log k}{k^x} \quad \forall x\in(1+\delta,R),\ R>1+\delta \text{ bel.}$$

$$\underset{R>1+\delta \text{ bel.}}{\overset{\delta>0 \text{ bel.}}{\Longrightarrow}} \text{———— '' ————} \quad \forall x\in(1,\infty)$$

$$\overset{(**),(***)}{\Longrightarrow} \zeta'(x) \text{ stetig auf } (1+\delta,\infty)$$

$$\overset{\delta>0 \text{ bel.}}{\Longrightarrow} \text{—— '' ——} \ (1,\infty)$$

denn: $\frac{1}{2} n^{\alpha-1} \geq \frac{n^\alpha}{1+n^2} \Leftrightarrow 1+n^2 \geq 2n \Leftrightarrow (1-n)^2 \geq 0$

Es gilt: $\|f_n\| = \frac{1}{2} n^{\alpha-1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \Leftrightarrow \alpha < 1$

$\Rightarrow f_n \xrightarrow[\text{glm.}]{} 0$, falls $\alpha < 1$,

und $f_n \not\xrightarrow[\text{glm.}]{} 0$, falls $\alpha \in [1,2)$

zu b) $f_n'(x) = \frac{n^\alpha(1-n^2x^2)}{(1+n^2x^2)^2}$

$\underline{\alpha > 2:}$ keine pktw. Konv. $\Rightarrow$ keine gliedweise Diffbarkeit

$\underline{0 < \alpha \leq 2:}$ $f_n'(0) = n^\alpha \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty \Rightarrow$ — " —

$\underline{\alpha = 0:}$ $f_n'(0) = 1 \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 \neq 0 = f'(0) \Rightarrow$ — " —

$\underline{\alpha < 0:}$ $f_n'(0) = n^\alpha \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$|f_n'(x)| \leq \frac{n^\alpha(1+n^2x^2)}{(1+n^2x^2)^2} \leq \frac{n^\alpha}{n^2x^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, $x \in (0,1]$

$\Rightarrow f_n' \xrightarrow[n\to\infty]{} f' \equiv 0$

$\Rightarrow$ gliedw. Diffbarkeit

6. Übung zur Analysis II, SS 2002

Aufgabe 3 (4+2 Punkte) Sei $\alpha \in \mathbb{R}$ und $(f_n)_{n\geq 1}$ eine Funktionenfolge mit

$$f_n : [0,1] \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{n^\alpha x}{1+(nx)^2} \quad \text{für } n \in \mathbb{N}.$$

a) Untersuchen Sie die Funktionenfolge auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz.

b) Untersuchen Sie die Funktionenfolge auf gliedweise Differenzierbarkeit.

zu a) <u>pktw. Konv.:</u>

$$x=0 \Rightarrow f_n(x)=0 \;\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \text{konv. für } x=0 \;\forall \alpha \in \mathbb{R}$$

$$x \in (0,1] \Rightarrow f_n(x) = n^{\alpha-2} \frac{x}{x^2+\frac{1}{n^2}}$$

<u>$\alpha<2$:</u> $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0 \cdot \frac{x}{x^2} = 0 \quad \forall x \in (0,1]$

<u>$\alpha=2$:</u> $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \frac{x}{x^2} = \frac{1}{x}$ —— " ——

<u>$\alpha>2$:</u> $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \infty$ bzw. ex. nicht

$$\Rightarrow f_n \longrightarrow \begin{cases} 0 & \alpha<2 \\ \left.\begin{cases} 0 & x=0 \\ \frac{1}{x} & x\neq 0 \end{cases}\right\} & \alpha=2 \\ \text{ex. nicht} & \alpha>2, x\neq 0 \end{cases}$$

<u>glm. Konv:</u>

<u>$\alpha>2$:</u> keine pktw. Konv. $\Rightarrow$ keine glm. Konv.

<u>$\alpha=2$:</u> f_n stetig $\forall n$, $f: x \mapsto \begin{cases} 0 & , x=0 \\ \frac{1}{x} & , x\neq 0 \end{cases}$ unstetig

$\Rightarrow$ keine glm. Konv.

<u>$\alpha<2$:</u> Bestimme $\|f_n - f\|_{[0,1]} = \sup_{x\in[0,1]} |f_n(x)|$

dazu: $f_n'(x) = \dfrac{n^\alpha(1+n^2x^2) - n^\alpha x \cdot 2n^2 x}{(1+n^2x^2)^2}$

$$f_n'(x)=0 \Leftrightarrow 1+n^2x^2-2n^2x^2=0 \overset{x>0}{\Leftrightarrow} x=\frac{1}{n}$$

$$\Rightarrow \|f_n\| = \max\{\underbrace{f_n(0)}_{=0}, \underbrace{f_n(\tfrac{1}{n})}_{=\frac{n^{\alpha-1}}{2}}, \underbrace{f_n(1)}_{=\frac{n^\alpha}{1+n^2}}\} = \frac{n^{\alpha-1}}{2}$$

(ix) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+2} \overset{a)}{=} \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{1+t}\,dt = \frac{1}{2}\log(1+t)\Big|_0^1 = \frac{1}{2}\log 2$