LEHRSTUHL A FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. E. Görlich,
Dipl.-Math. T. Heck, I. Klöcker

Aachen, den 29. Mai 2002

6. Übung zur Analysis II

Abgabe: Freitag, 7. Juni 2002, bis 13:30 Uhr im Kasten vor Raum 155, Hauptgebäude

Hinweis. Bitte beachten Sie die Verlegung der Diskussionsstunden von Donnerstag, 30. 5., auf Freitag, 31. 5., 15:45–17:15 Uhr, Hörsaal SG 413.

Aufgabe 1 (4+1 Punkte)

a) Sei $(f_n)_{n\geq 1}$ eine Folge stetiger Funktionen auf $D\subset\mathbb{R}$, die gleichmäßig gegen eine Funktion f auf D konvergiert. Zeigen Sie:
$$\lim_{n\to\infty} f_n(x_n) = f(x)$$
für jede Folge $(x_n)_{n\geq 1}$ mit $x_n\in D$ für alle $n\in\mathbb{N}$ und $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, $x\in D$.

b) Zeigen Sie:
$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{2^k}{k!}\left(\frac{n}{n+2}\right)^k = e^2.$$

Aufgabe 2 (4 Punkte) Gegeben sei die Funktionenfolge $(f_n)_{n\geq 1}$ mit $f_n:[0,1]\to\mathbb{R}, x\mapsto nxe^{-nx}$ für $n\in\mathbb{N}$. Berechnen Sie
$$\int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx \quad\text{und}\quad \lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\,dx.$$
Ist f_n gleichmäßig konvergent?

Aufgabe 3 (4+2 Punkte) Sei $\alpha\in\mathbb{R}$ und $(f_n)_{n\geq 1}$ eine Funktionenfolge mit
$$f_n:[0,1]\to\mathbb{R}, x\mapsto \frac{n^\alpha x}{1+(nx)^2}\quad \text{für } n\in\mathbb{N}.$$

a) Untersuchen Sie die Funktionenfolge auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz.

b) Untersuchen Sie die Funktionenfolge auf gliedweise Differenzierbarkeit.

Aufgabe 4 (4 Punkte) Zeigen Sie, dass für alle $x\in(1,\infty)$
$$\zeta'(x) = -\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\log k}{k^x}$$
ist und dass ζ' stetig auf $(1,\infty)$ ist.

Aufgabe 5 (5 Punkte) Seien $a,b\in\mathbb{R}$ mit $a<b$ und sei $(f_n)_{n\geq 1}$ eine Folge stetiger Funktionen auf $[a,b]$ mit $f_n(x)\geq f_{n+1}(x)$ für alle $x\in[a,b]$ und alle $n\in\mathbb{N}$. Außerdem konvergiere die Funktionenfolge punktweise gegen 0.
Zeigen Sie, dass die Funktionenfolge auf $[a,b]$ gleichmäßig gegen 0 konvergiert.

Aufgabe 6 (4+2 Punkte)

a) Zeigen Sie, dass für alle $a, b \in \mathbb{N}$ gilt

$$\int_0^1 \frac{t^{a-1}}{1+t^b}\,dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{a+bk}.$$

Hinweis: Schreiben Sie den Integranden als geometrische Reihe.

b) Berechnen Sie (i) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}$ und (ii) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+2}$.