5. Übung zur Analysis II, SS 2002

Aufgabe 1 (2+3 Punkte) Zeigen Sie:

a) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^{\alpha}}$ konvergiert genau dann, wenn $\alpha > 1$ ist.

b) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \log n \cdot \log(\log n)}$ ist divergent.

a) Def. $f : [2, \infty] \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{1}{x(\log x)^{\alpha}}$

f ist monoton fallend: $f'(x) = \frac{-(\log x)^{\alpha} - x\alpha(\log x)^{\alpha-1}\frac{1}{x}}{x^2(\log x)^{2\alpha}}$

$$= -\frac{1}{x^2}(\log x)^{-\alpha}\underbrace{\left(1 + \frac{\alpha}{\log x}\right)}_{>0 \text{ für } x > e^{|\alpha|}} \quad \left(\underset{(x\geq 2)}{\Leftrightarrow} \frac{|\alpha|}{\log x} < 1\right)$$

$\Rightarrow$ f ist monoton fallend auf $[n_0, \infty)$ mit $n_0 := \max\{2, [e^{|\alpha|} + 1]\}$

$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^{\alpha}}$ konv. $\Leftrightarrow$ $\sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^{\alpha}}$ konv.

Integral-Vergleichskriterium: $\sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^{\alpha}}$ konv $\Leftrightarrow$ $\int_{n_0}^{\infty} \frac{dx}{x(\log x)^{\alpha}}$ konv

$\int_{n_0}^{\infty} \frac{dx}{x(\log x)^{\alpha}}$ konv. nach Ü 4 A 5 b) genau für $\alpha > 1$.

$\Rightarrow$ Beh.

b) Def. $f : [2, \infty) \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{1}{x \log x \log(\log x)}$

f mon. fallend: $f'(x) = \frac{-\log x \log(\log x) - \log(\log x) - 1}{x^2(\log x)^2 (\log(\log x))^2} < 0$ für $x \geq 4 > e$

$\sum_{n=2}^{\infty} f(n)$ konv. $\Leftrightarrow$ $\sum_{n=4}^{\infty} f(n)$ konv. $\Leftrightarrow$ $\int_4^{\infty} f(x)\,dx$ ex.

$$\int_4^b \frac{dx}{x \log x \log(\log x)} = \log(\log(\log x))\Big|_4^b \longrightarrow \infty \text{ für } b \to \infty$$

$\Rightarrow \int_4^{\infty} f(x)\,dx$ ex. nicht $\Rightarrow$ $\sum_{n=2}^{\infty} f(n)$ divergiert.

//

5. Übung zur Analysis II, SS 2002

Aufgabe 7 (3 Punkte, die ebenfalls nicht zur Gesamtpunktzahl mitzählen)
Mit der Substitution $x^2 = t$ wurde die folgende Formel hergeleitet:

$$3 = \frac{x^3}{3}\Big|_{-2}^{1} = \int_{-2}^{1} x^2\,dx = \frac{1}{2}\int_{4}^{1} \frac{t}{\sqrt{t}}\,dt = \frac{1}{3}t^{\frac{3}{2}}\Big|_{4}^{1} = -\frac{7}{3}.$$

Wo ist der Fehler?

Substitutionsregel: $f: I \to \mathbb{R}$ stetig, $\varphi: [a,b] \to I$ stetig diffbar

$$\Rightarrow \int_a^b f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\,dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,dx$$

Falls φ streng monoton mit $\varphi(a)=\alpha$, $\varphi(b)=\beta$, dann gilt:

$$(*)\quad \int_\alpha^\beta f(x)\,dx = \int_{\varphi^{-1}(\alpha)}^{\varphi^{-1}(\beta)} f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\,dt$$

~~Bsp~~ Der Fehler: Anwendung von (*) mit $\alpha = 4$, $\beta = 1$, $f(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x}$
$\varphi(x) = x^2$, $\varphi^{-1}(4) = -2$, $\varphi^{-1}(1) = 1$

aber: φ ist nicht injektiv auf $[-2,1]$, d.h. $\varphi^{-1}(1)$ ist nicht wohldefiniert

Rettung: Spalte Integral auf:

$$\int_{-2}^{1} x^2\,dx = \int_{-2}^{0} x^2\,dx + \int_{0}^{1} x^2\,dx$$

Nun (*) anwendbar auf beide Integrale, da φ auf $[-2,0]$ und $[0,1]$ jeweils streng monoton ist.

$$\Rightarrow \int_{-2}^{0} x^2\,dx = -\int_{4}^{0} t\,\frac{dt}{2\sqrt{t}} = \frac{1}{2}\int_{0}^{4}\sqrt{t}\,dt = \frac{1}{3}t^{3/2}\Big|_0^4 = \frac{8}{3}$$

$t = x^2$ $\Leftrightarrow \sqrt{t} = -x$
$\frac{dt}{dx} = 2x$ $(x \in [-2,0])$

$$\int_{0}^{1} x^2\,dx = \frac{1}{2}\int_{0}^{1} t\,\frac{dt}{\sqrt{t}} = \frac{1}{3}t^{3/2}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}$$

$t = x^2$ $\Leftrightarrow \sqrt{t} = x$
$\frac{dt}{dx} = 2x$ für $x \in [-2,0]$

$$\Rightarrow \int_{-2}^{1} x^2\,dx = 3$$

d) Satz (4.7): Für $x>0$ ist $\Gamma(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n!\, n^x}{x(x+1)\cdot\ldots\cdot(x+n)}$

$$\Rightarrow \left\{\Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right)\right\}^2 \underset{\substack{\nearrow \\ x\mapsto x^2 \text{ ist stetig}}}{=} \lim_{n\to\infty} \left\{\frac{n!\sqrt{n}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\ldots\cdot\left(\frac{1}{2}+n\right)}\right\}^2$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left\{\frac{n!\sqrt{n}\cdot 2^{n+1}}{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n+1)}\right\}^2$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left\{\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n\cdot 2^{n+1}\cdot\sqrt{n}}{(2n-1)!!\,(2n+1)}\right\}^2$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left\{\frac{(2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot 2n)^2\cdot 4\cdot n}{[(2n-1)!!]^2(2n+1)^2}\right.$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{[(2n)!!]^2}{[(2n-1)!!]^2(2n+1)}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{4n}{2n+1} \underset{c)}{=} \frac{\pi}{2}\cdot 2 = \pi$$

$$\Rightarrow \Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \quad\text{und}\quad \Gamma\left(\tfrac{3}{2}\right) = \Gamma\left(1+\tfrac{1}{2}\right) = \tfrac{1}{2}\Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}. \quad //$$

b) Für $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ gilt $\quad 0 \leq (\sin x)^{n+1} \leq (\sin x)^n$,

also folgt aus der Monotonie der Integration:

$0 < I(n+1) \leq I(n)$. $\quad 0 = I(n+1)$ ist nicht möglich, da $(\sin x)^{n+1}$ stetig und nicht $\equiv 0$ ist.

$$\Rightarrow 1 = \frac{I(n+1)}{I(n+1)} \leq \frac{I(n)}{I(n+1)} \underset{\substack{\uparrow \\ I(n+2) \leq I(n+1)}}{\leq} \frac{I(n)}{I(n+2)}$$

c) Definiere $w(m) := \frac{I(2m)}{I(2m+1)}$. Dann gilt für $m \in \mathbb{N}$:

$$w(m) = \frac{I(2m)}{I(2m+1)} = \frac{\frac{2m-1}{2m} I(2m-2)}{\frac{2m}{2m+1} I(2m-1)} = \frac{2m-1}{2m} \cdot \frac{2m+1}{2m} \frac{I(2m-2)}{I(2m-1)}$$

$$= \frac{2m-1}{2m} \cdot \frac{2m+1}{2m} w(m-1) = \left(1 - \frac{1}{4m^2}\right) \cdot w(m-1)$$

$w(0) = \frac{I(0)}{I(1)} = \frac{\pi}{2}$. b) liefert

$$1 \leq \frac{I(2m)}{I(2m+1)} = w(m) \leq \frac{I(2m)}{I(2m+2)} \underset{a)}{=} \frac{2m+2}{2m+1} \xrightarrow[m \to \infty]{} 1,$$

also $\lim\limits_{m \to \infty} w(m) = 1$.

Beh: $w(m) = (2m+1) \frac{[(2m-1)!!]^2}{[(2m)!!]^2} \cdot \frac{\pi}{2}$

Bew: vollst. Ind.

$m=1$: $w(1) = 3 \cdot \frac{1^2}{2^2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3\pi}{4} = \left(1 - \frac{1}{4}\right) \frac{\pi}{2}$ ✓

$m \to m+1$: $w(m+1) = \frac{2m+1}{2m+2} \cdot \frac{2m+3}{2m+2} w(m)$

$$\underset{\text{I.V.}}{=} \frac{(2m+3)(2m+1)}{(2m+2)^2} (2m+1) \frac{[(2m-1)!!]^2}{[(2m)!!]^2} \cdot \frac{\pi}{2}$$

$$= (2m+3) \cdot \frac{[(2m+1)!!]^2}{[(2m+2)!!]^2} \cdot \frac{\pi}{2}$$

Damit: $1 = \frac{\pi}{2} \cdot \lim\limits_{m \to \infty} \left((2m+1) \frac{[(2m-1)!!]^2}{[(2m)!!]^2} \right) \Rightarrow$ Beh. ∎

5. Übung zur Analysis II, SS 2002

Aufgabe 6 (3+2+4+2 Punkte, die nicht zur Gesamtpunktzahl mitzählen)

Es sei $I(n) := \int_0^{\pi/2} \sin^n u \, du$ für $n \in \mathbb{N}_0$.

a) Zeigen Sie:

$$I(0) = \frac{\pi}{2}, \quad I(1) = 1, \quad I(n+2) = \frac{n+1}{n+2} I(n), \, n \geq 0.$$

b) Beweisen Sie für $n \in \mathbb{N}_0$ die Abschätzung

$$1 \leq \frac{I(n)}{I(n+1)} \leq \frac{I(n)}{I(n+2)}.$$

c) Zeigen Sie, dass sich π als das folgende Produkt darstellen lässt (das so genannte Wallis-Produkt):

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{m \to \infty} \left(\frac{1}{2m+1} \frac{[(2m)!!]^2}{[(2m-1)!!]^2} \right).$$

Dabei sei für $m \in \mathbb{N}$

$$(2m)!! := 2 \cdot 4 \cdots (2m) \quad \text{und} \quad (2m+1)!! := 1 \cdot 3 \cdots (2m+1).$$

Hinweis. Zeigen Sie für $m \in \mathbb{N}$

$$\frac{I(2m)}{I(2m+1)} = (2m+1) \frac{[(2m-1)!!]^2}{[(2m)!!]^2} \frac{\pi}{2}.$$

d) Zeigen Sie:

$$\Gamma(\tfrac{1}{2}) = \sqrt{\pi} \quad \text{und} \quad \Gamma(\tfrac{3}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

a) $I(0) = \int_0^{\pi/2} 1 \, du = \frac{\pi}{2}$

$I(1) = \int_0^{\pi/2} \sin u \, du = -\cos u \Big|_0^{\pi/2} = 1$

Für $n \geq 0$ gilt:

$$I(n+2) = \int_0^{\pi/2} \sin^{n+2} u \, du = \int_0^{\pi/2} \sin u \cdot (\sin u)^{n+1} du$$

$$\underset{\text{part. Int.}}{=} \underbrace{-\cos u \cdot (\sin u)^{n+1} \Big|_0^{\pi/2}}_{=0} + \int_0^{\pi/2} (n+1)(\sin u)^n \cdot \underbrace{\cos^2 u}_{=1-\sin^2 u} \, du$$

$$= (n+1) \int_0^{\pi/2} \left(\sin^n u - \sin^{n+2} u \right) du$$

$$= (n+1) \cdot I(n) - (n+1) \cdot I(n+2)$$

$$\Rightarrow I(n+2) = \frac{n+1}{n+2} \cdot I(n).$$

c) $|f_n(x)| \leq M$, $|g_n(x)| \leq M$ für alle $x \in D$ und $n \in \mathbb{N}$. Seien N_1, N_2 wie in a).

$g_n \xrightarrow[glm]{} g \Rightarrow$ Zu $\varepsilon = 1$ ex. $N_3 > 0$, so dass für $n \geq N_3$:

$|g_n(x) - g(x)| < 1$ für alle $x \in D$.

$\Rightarrow |g(x)| - |g_n(x)| \leq |g_n(x) - g(x)| < 1$

$\Rightarrow |g(x)| \leq 1 + |g_n(x)| \leq 1 + M =: M'$ für alle $x \in D$.

Also: Zu $\varepsilon > 0$ wähle $N := \max\{N_1, N_2, N_3\}$, dann gilt ~~fü~~ für alle $x \in D$ und $n \geq N$:

$|(f_n \cdot g_n)(x) - (f \cdot g)(x)|$

$= |(f_n \cdot g_n)(x) - (f_n \cdot g)(x) + (f_n \cdot g)(x) - (f \cdot g)(x)|$

$\leq |f_n(x)| \cdot |g_n(x) - g(x)| + |g(x)| \cdot |f_n(x) - f(x)|$

$< M \cdot \varepsilon + \cancel{(\ldots)}\, M' \cdot \varepsilon \leq 2M' \cdot \varepsilon$

$\Rightarrow f_n \cdot g_n \xrightarrow[glm]{} f \cdot g$ //

5. Übung zur Analysis II, SS 2002

Aufgabe 2 (1+2+2+2+1 Punkte) Untersuchen Sie die folgenden uneigentlichen Integrale auf Konvergenz bzw. Divergenz:

a) $\int_1^7 \frac{1}{(5-x)^3}\,dx$

b) $\int_0^1 \log\left(\frac{1}{1-x}\right)dx$

c) $\int_0^2 \frac{\cos\frac{1}{x}}{x^{8/7}}\,dx$

d) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}}$

e) $\int_0^5 \frac{x}{\sqrt{e^{2x}-1}}\,dx.$

a) $\int_1^7 \frac{1}{(5-x)^3}dx = \int_1^5 \frac{1}{(5-x)^3}dx + \int_5^7 \frac{1}{(5-x)^3}dx$ Integrand hat bei $x=5$ eine Polstelle

$\int_1^7 \cdot/\cdot\, dx$ ex. $\Leftrightarrow \int_1^5 \cdot/\cdot\, dx,\ \int_5^7 \cdot/\cdot\, dx$ ex.

$\int_1^5 \frac{1}{(5-x)^3}dx = \lim_{b\to 5}\left(-\frac{1}{2}(5-x)^{-2}\right)\Big|_1^b = \lim_{b\to 5}\left\{-\frac{1}{2}(5-b)^{-2}\right\} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{16}$ ex. nich

$\Rightarrow \int_1^7 \frac{1}{(5-x)^3}dx$ ist divergent.

b) $\int_0^1 \log\left(\frac{1}{1-x}\right)dx \underset{\uparrow}{=} \int_1^\infty \log u\ u^{-2}\,du$

Subst: $\frac{1}{1-x} = u \Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{1}{(1-x)^2} = u^2$

$\exists\ x_0 \in \mathbb{R}$ mit $\log x \le \sqrt{x}$ für alle $x \geq x_0$

$\Rightarrow \int_{x_0}^\infty \log u\, u^{-2}\,du \le \int_{x_0}^\infty u^{-3/2}\,du < \infty$

$\Rightarrow \int_1^\infty \log u\ u^{-2}\,du$ konvergiert. (nach Vergleichskriterium)

c) $\int_0^2 \frac{\cos\frac{1}{x}}{x^{8/7}}dx \underset{\uparrow}{=} \int_{1/2}^\infty \cos u \cdot u^{8/7}\cdot u^{-2}\,du$

Subst: $\frac{1}{x} = u \Rightarrow \frac{du}{dx} = -\frac{1}{x^2} = -u^2$

c) $f_n(x) = \frac{n \cdot \sin(nx)}{n^2 + x^2}$, $x \in \mathbb{R}$

$$\left| \frac{n \cdot \sin(nx)}{n^2+x^2} \right| \leq \frac{n}{n^2+x^2} = \frac{1}{n + \underbrace{\frac{x^2}{n}}_{\geq 0}} \leq \frac{1}{n}$$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} f_n(x) =: f(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, und:

für $\varepsilon > 0$ ex. $N = \frac{1}{\varepsilon}$, so dass für alle $n \geq N$ gilt:

$|f_n(x) - f(x)| = \left| \frac{n \cdot \sin(nx)}{n^2+x^2} - 0 \right| \leq \frac{1}{n} < \varepsilon$

d.h. $(f_n)_{n\geq 1}$ ist gleichmäßig konvergent gegen $f \equiv 0$. //

5. Übung zur Analysis II, SS 2002

Aufgabe 4 (3+3+3 Punkte) Untersuchen Sie die folgenden Funktionenfolgen auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz:

a) $(f_n)_{n\geq 1}$ mit $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{1+nx}$,

b) $(g_n)_{n\geq 1}$ mit $g_n : [0,1] \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{x}{nx+1}$,

c) $(h_n)_{n\geq 1}$ mit $h_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{n\sin(nx)}{n^2+x^2}$,

a) punktweise Konvergenz:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) =: f(x) = \begin{cases} 1 & , x=0 \\ 0 & , x \in (0,1] \end{cases}$$

$\Rightarrow (f_n)_{n\geq 1}$ konvergiert punktweise gegen $f : [0,1] \to \mathbb{R}$.

$(f_n)_{n\geq 1}$ ist auf $[0,1]$ nicht glm. konvergent gegen f,

denn: für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\frac{1}{n} \in [0,1]$.

$$\Rightarrow \|f_n - f\| := \sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| \geq |f_n(\tfrac{1}{n}) - f(\tfrac{1}{n})|$$

$$= |\tfrac{1}{2} - 0| = \tfrac{1}{2} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

d.h. $\|f_n - f\| \not\to 0$, also konvergiert $(f_n)_{n\geq 1}$ nicht glm. gegen f.

b) $f_n(x) = \frac{x}{1+xn}$, $x \in [0,1]$

Es gilt: $0 \leq f_n(x) \leq \frac{x}{xn} = \frac{1}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, $x \in (0,1]$

und $0 = f_n(0)$ für alle $n \in \mathbb{N}$

d.h. $(f_n)_{n\geq 1}$ ist punktweise konvergent gegen $f \equiv 0$ und es gilt sogar:

für alle $\varepsilon > 0$ ex. $N > \frac{1}{\varepsilon} > 0$, so dass für $n \geq N$ gilt:

$$|f_n(x) - f(x)| = \left|\frac{x}{1+xn} - 0\right| \leq \frac{1}{n} < \varepsilon, \text{ für } x \in [0,1],$$

also ist $(f_n)_{n\geq 1}$ sogar gleichmäßig konvergent gegen $f \equiv 0$.

5. Übung zur Analysis II, SS 2002

Aufgabe 3 (4 Punkte) Beweisen Sie die LEGENDREsche Verdopplungsformel:

$$\Gamma(\frac{x}{2})\Gamma(\frac{x+1}{2}) = 2^{1-x}\sqrt{\pi}\Gamma(x) \quad \text{für } x > 0.$$

Anleitung: Betrachten Sie die Funktion

$$f(t) = 2^t\Gamma(\frac{t}{2})\Gamma(\frac{t+1}{2}) \quad \text{für } t > 0$$

und zeigen Sie, dass sie die Funktionalgleichung $f(t+1) = tf(t)$ erfüllt und logarithmisch konvex ist.

Funktionalgleichung:

$$f(t+1) = 2^{t+1}\Gamma(\tfrac{t+1}{2})\Gamma(\tfrac{t+2}{2}) = 2^{t+1}\Gamma(\tfrac{t+1}{2})\Gamma(\tfrac{t}{2}+1)$$

$$\underset{\text{Fkt-gl. der }\Gamma\text{-Fkt.}}{=} 2^{t+1}\Gamma(\tfrac{t+1}{2})\Gamma(\tfrac{t}{2})\cdot t\cdot\tfrac{1}{2} = t\cdot f(t)$$

$\Rightarrow$ f erfüllt die Funktionalgleichung $f(t+1)=t\cdot f(t)$

logarithmisch konvex:

$$\log(f(t)) = \log(2^t\Gamma(\tfrac{t}{2})\cdot\Gamma(\tfrac{t+1}{2})) = t\cdot\log 2 + \log\Gamma(\tfrac{t}{2}) + \log\Gamma(\tfrac{t+1}{2})$$

$t\cdot\log 2$ ist konvex (klar)

Allgemein: g konvex auf $(0,\infty) \Rightarrow \tilde{g}:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $x\mapsto g(\frac{x}{2})$ ist konvex:

Seien $a,b\in(0,\infty)$, $\lambda\in[0,1]$. Dann: $\tilde{g}((1-\lambda)\cdot a + \lambda\cdot b) = g((1-\lambda)\frac{a}{2} + \lambda\cdot\frac{b}{2})$

$\underset{g\text{ konvex}}{\leq} (1-\lambda)g(\frac{a}{2}) + \lambda g(\frac{b}{2}) = (1-\lambda)\tilde{g}(a) + \lambda\cdot\tilde{g}(b) \Rightarrow \tilde{g}$ ist ~~analog~~ konvex

Analog: $\tilde{g}: x\mapsto g(\frac{x+1}{2})$ ist konvex.

Klar: Summe konvexer Funktionen ist konvex

$\Rightarrow$ $\log f(t)$ ist konvex $\Rightarrow$ f ist logarithmisch konvex.

Jede Funktion $c\cdot f$ mit $c>0$ erfüllt auch die beiden Eigenschaften.

Gilt nun noch $(c\cdot f)(1)=1$, so ist $c\cdot f = \Gamma$ nach dem Satz von Bohr.

$$f(1) = 2\cdot\Gamma(\tfrac{1}{2})\cdot\Gamma(1) = 2\cdot\sqrt{\pi} \quad (\text{s. A 6 d}))$$

$$\Rightarrow \frac{f}{2\cdot\sqrt{\pi}} = \Gamma \quad \text{bzw.} \quad \frac{f(x)}{2\sqrt{\pi}} = 2^x\Gamma(\tfrac{x}{2})\Gamma(\tfrac{x+1}{2})\cdot\frac{1}{2\sqrt{\pi}} = \Gamma(x)$$

$$\Leftrightarrow \Gamma(\tfrac{x}{2})\Gamma(\tfrac{x+1}{2}) = 2^{1-x}\sqrt{\pi}\,\Gamma(x)$$

//

$$\int_{1/2}^{b} \frac{\cos u}{u^{6/7}}\,du \underset{\text{P.I.}}{=} \left[\sin u \, u^{-6/7}\right]_{1/2}^{b} - \int_{1/2}^{b} \sin u \cdot u^{-13/7}\left(-\frac{6}{7}\right) du$$

$$= -\sin\tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{2}\right)^{-6/7} + \underbrace{\sin b \cdot b^{-6/7}}_{\xrightarrow[b\to\infty]{} 0} + \frac{6}{7}\int_{1/2}^{b} \frac{\sin u}{u^{13/7}}\,du$$

$\int_{1/2}^{\infty} \frac{\sin u}{u^{13/7}}$ ex. nach Vergleichskriterium,

denn $\int_{1/2}^{\infty} \frac{|\sin u|}{|u^{13/7}|}\,du \leq \int_{1/2}^{\infty} \frac{1}{u^{13/7}}\,du < \infty$

$\Rightarrow \lim_{b\to\infty} \int_{1/2}^{b} \frac{\cos u}{u^{6/7}}\,du$ ex.

d) $$\left| \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}} \right| = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}} = \int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{x}\sqrt{1-x}} + \int_{1/2}^{1} \frac{dx}{\sqrt{x}\sqrt{1-x}}$$

$$\leq \sqrt{2}\int_0^{1/2} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx + \sqrt{2}\int_0^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x}}\,dx$$

$1/2 \leq 1-x \leq 1$ für $x \in [0, 1/2]$

$1/2 \leq x \leq 1$ für $x \in [1/2, 1]$

$$= \sqrt{2}\left(\left[2\sqrt{x}\right]_0^{1/2} + \left[(-2)\sqrt{1-x}\right]_{1/2}^{1}\right) < \infty$$

$\Rightarrow \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}}$ existiert

e) $\int_0^5 \frac{x}{\sqrt{e^{2x}-1}}\,dx$ $\qquad \lim_{x\downarrow 0} \frac{x}{\sqrt{e^{2x}-1}} \underset{\text{L'H}}{\overset{[\frac{0}{0}]}{=}} \lim_{x\downarrow 0} \frac{1}{\frac{1}{2\sqrt{e^{2x}-1}}\cdot 2 \cdot e^{2x}} = \lim_{x\downarrow 0} \frac{\sqrt{e^{2x}-1}}{e^{2x}} = 0$

$\Rightarrow$ das Integrand ist nicht unbeschränkt, kann durch 0 an der Stelle $x=0$ stetig ergänzt werden

$\rightarrow$ das ist ein eigentliches R-Integral, das Integral existiert. //

5. Übung zur Analysis II, SS 2002

Aufgabe 5 (1+2+2 Punkte) Gegeben seien die Funktionenfolgen $(f_n)_{n\geq 1}$, $(g_n)_{n\geq 1}$, die gleichmäßig gegen f bzw. g auf $D \subset \mathbb{R}$ konvergieren. Zeigen Sie:

a) $(f_n + g_n)_{n\geq 1}$ konvergiert gleichmäßig gegen $(f+g)$ auf D.

b) $(f_n \cdot g_n)_{n\geq 1}$ ist i. A. nicht gleichmäßig konvergent auf D.

c) Ist $|f_n(x)| \leq M$ und $|g_n(x)| \leq M$ für alle $x \in D$ und für alle $n \in \mathbb{N}$ mit einem $M \in \mathbb{R}$, so konvergiert auch $(f_n \cdot g_n)_{n\geq 1}$ gleichmäßig gegen $(f \cdot g)$.

a) $f_n \xrightarrow[\text{glm.}]{} f \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists N_1 > 0$ mit $\|f_n - f\| < \varepsilon$ für alle $n \geq N_1$,

d.h. $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ für alle $n \geq N_1$, $x \in D$.

$g_n \xrightarrow[\text{glm}]{} g \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists N_2 > 0$ mit

$|g_n(x) - g(x)| < \varepsilon$ für alle $n \geq N_2$, $x \in D$

Also: Zu $\varepsilon > 0$ wähle $N := \max\{N_1, N_2\}$, dann gilt für alle $n \geq N$ und $x \in D$:

$$|f_n(x) + g_n(x) - (f(x) + g(x))| \leq |f_n(x) - f(x)| + |g_n(x) - g(x)| < 2\varepsilon$$

$\Rightarrow f_n + g_n \xrightarrow[\text{glm}]{} f + g$

b) Betrachte auf $D := [0, \infty)$:

$f_n(x) := \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{n} & , x > 0 \\ \frac{1}{n} & , x = 0 \end{cases}$ und $g_n(x) := \frac{1}{n}$, $x \in [0, \infty)$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) =: f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & , x > 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$, $\lim\limits_{n\to\infty} g_n(x) =: g(x) = 0$,

für alle $x \in [0, \infty)$

Also: für alle $\varepsilon > 0$ ex. $N = \frac{1}{\varepsilon} > 0$, so dass für $n \geq N$:

$|f_n(x) - f(x)| = |g_n(x) - g(x)| = |\frac{1}{n}| < \varepsilon$ für alle $x \in [0, \infty)$.

D.h. $(f_n)_{n\geq 1}$, $(g_n)_{n\geq 1}$ sind glm konvergent gegen f bzw. g.

Aber: $(f_n \cdot g_n)(x) = \begin{cases} \frac{1}{xn} + \frac{1}{n^2} & , x > 0 \\ \frac{1}{n^2} & , x = 0 \end{cases}$ ist nicht glm. konvergent

gegen $\lim\limits_{n\to\infty} (f_n \cdot g_n) = 0$, denn:

$|f_n(\frac{1}{n}) \cdot g_n(\frac{1}{n}) - 0| = |1 + \frac{1}{n^2}| > 1$.