LEHRSTUHL A FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. E. Görlich,
Dipl.-Math. T. Heck, I. Klöcker

Aachen, den 3. Mai 2002

3. Übung zur Analysis II

Abgabe: Freitag, 10. Mai 2002, bis 13:30 Uhr im Kasten vor Raum 155, Hauptgebäude

Aufgabe 1 (3+1+1 Punkte) Es seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.

a) Sei f auf $[a,b]$ integrierbar, und es gelte $f(x) \geq 0$ für alle $x \in [a,b]$. Zeigen Sie: Ist f stetig in einem Punkt $x_0 \in [a,b]$ mit $f(x_0) > 0$, so gilt $\int\limits_a^b f(x)\,dx > 0$.

b) Sei f auf $[a,b]$ stetig mit $f(x) \geq 0$ für alle $x \in [a,b]$. Zeigen Sie: Ist $\int\limits_a^b f(x)\,dx = 0$, so gilt $f(x) = 0$ für alle $x \in [a,b]$.

c) Zeigen Sie anhand eines Beispiels, dass die Aussage von Teil b) nicht mehr gilt, wenn man statt der Stetigkeit nur noch die Integrierbarkeit voraussetzt.

Aufgabe 2 (4 Punkte) Sei f integrierbar auf $[a,b]$ und es gelte

$$\int_a^b f(x)\,dx > 0.$$

Zeigen Sie, dass ein Intervall $(\alpha,\beta) \subset (a,b)$ existiert mit der Eigenschaft, dass $f(x) > 0$ für alle $x \in [\alpha,\beta]$.

Aufgabe 3 (4 Punkte) Sei f auf jedem Intervall $[0,x]$, $x > 0$, integrierbar. Zeigen Sie, dass aus $\lim\limits_{t\to\infty} f(t) = a \in \mathbb{R}$ folgt

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} \int_0^x f(t)\,dt = a.$$

Aufgabe 4 (2+2 Punkte) Sei $f : [-a,a] \to \mathbb{R}$, $a > 0$, integrierbar. Beweisen Sie:

a) Ist f ungerade, d.h. $f(x) = -f(-x)$ für alle $x \in [-a,a]$, so gilt $\int\limits_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$.

b) Ist f gerade, d.h. $f(x) = f(-x)$ für alle $x \in [-a,a]$, so gilt $\int\limits_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2 \cdot \int\limits_0^a f(x)\,dx$.

Aufgabe 5 (5 Punkte) Seien f, g integrierbar auf $[a,b]$ und $p > 1$. Beweisen Sie mittels der Hölderschen Ungleichung die Minkowski-Ungleichung für Integrale:

$$\left(\int_a^b |f(x)+g(x)|^p\,dx\right)^{1/p} \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p\,dx\right)^{1/p} + \left(\int_a^b |g(x)|^p\,dx\right)^{1/p}.$$

Aufgabe 6 (3+2 Punkte)

a) Beweisen Sie für stetige Funktionen $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ die Gleichung

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} f\left(\frac{j}{n}\right) = \int_0^1 f(x)\, dx.$$

b) Beweisen Sie:

(i) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \frac{n}{j^2+n^2} = \frac{\pi}{4}$,

(ii) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j+n} = \log 2$.

Hinweis. Sie dürfen folgende Integrale benutzen:

$$\int_a^b \frac{1}{x}\, dx = \log b - \log a \quad \text{für } a,b > 0 \text{ und}$$
$$\int_a^b \frac{1}{1+x^2}\, dx = \arctan b - \arctan a.$$