LEHRSTUHL A FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. E. Görlich,
Dipl.-Math. T. Heck, I. Klöcker

Aachen, den 24. April 2002

2. Übung zur Analysis II

Abgabe: Freitag, 3. Mai 2002, bis 13:30 Uhr im Kasten vor Raum 155, Hauptgebäude

Aufgabe 1 (4+$\frac{3}{2}$+$\frac{3}{2}$ Punkte) Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine Abbildung. Zeigen Sie:

a) f ist genau dann konvex und konkav, wenn f eine Polynomfunktion vom Grad kleiner gleich 1 ist.

b) Ist f konvex, so ist auch $g : I \to \mathbb{R}, x \mapsto e^{f(x)}$, konvex.

c) Ist f konkav und $f(x) > 0$ für alle $x \in I$, so ist auch $h : I \to \mathbb{R}, x \mapsto \log(f(x))$, konkav.

Aufgabe 2 (2+2 Punkte)

a) Für welche $a \in \mathbb{R}$ ist $f : (0,\infty) \to (0,\infty), x \mapsto x^a$, konvex bzw. konkav?

b) Für welche $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$ ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto a^x$, konvex bzw. konkav?

Aufgabe 3 (4 Punkte) Beweisen Sie die Höldersche Ungleichung für Reihen:
Seien $p > 1$ und $q > 1$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Sind die Reihen $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|^p$ und $\sum_{n=1}^{\infty} |w_n|^q$ mit $z_n, w_n \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, konvergent, so konvergiert auch $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n w_n|$, und es gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} |z_n w_n| \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|^p \right)^{1/p} \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty} |w_n|^q \right)^{1/q}.$$

Aufgabe 4 (3+2 Punkte) Für $z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ definiert man die *Maximumsnorm von* z durch $\|z\|_\infty := \max\{|z_1|, \ldots, |z_n|\}$.

a) Zeigen Sie, dass für alle $z \in \mathbb{C}^n$ gilt:

  (i) $\|z\|_\infty \leq \|z\|_p$ für alle $p \in \mathbb{R}$, $p \geq 1$,

  (ii) $\|z\|_\infty = \lim_{p\to\infty} \|z\|_p$.

b) Skizzieren Sie für $p \in \{1, 2, \infty\}$ jeweils die Menge

$$\left\{ x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2;\ \|x\|_p = 1 \right\}.$$

Aufgabe 5 (2 Punkte) Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Abbildung. Beweisen oder widerlegen Sie (durch Angabe eines Gegenbeispiels) folgende Aussagen:

a) Ist $|f|$ integrierbar, so ist auch f integrierbar.

b) Ist f^2 integrierbar, so ist auch f integrierbar.

Aufgabe 6 (3 Punkte) Berechnen Sie für alle $n \in \mathbb{N}$ das folgende Integral:

$$\int_0^1 \frac{1}{n}[nx]\, dx.$$

Aufgabe 7 (4 Punkte) Sei $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{falls } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \\ \cos(\frac{\pi}{3q}), & \text{falls } x \in \mathbb{Q}, x = \frac{p}{q} \text{ in gekürzter Bruchdarstellung.} \end{cases}$$

Untersuchen Sie f auf Integrierbarkeit.