LEHRSTUHL A FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. E. Görlich
Dipl.-Math. T. Heck

Aachen, den 26.05.2001

9. Übung zur Vorlesung Topologie

(Abgabe: Dienstag, 03.07.2001, bis 11.45 Uhr im Übungskasten)

Aufgabe 1: Sind die folgenden topologischen Räume normal und/oder regulär?

a) Der topologische Raum $\mathbb{R}^*$ aus Aufgabe 3a), 2. Übung.

b) Die obere Halbebene H aus Aufgabe 3b), 2. Übung. $\boxed{5}$

Aufgabe 2: Sei X ein normaler, topologischer Raum und Y ein topologischer Raum, $f : X \to Y$ eine surjektive stetige und abgeschlossene Abbildung. Man zeige: Y ist normal. $\boxed{4}$

Aufgabe 3: Sei X ein topologischer Raum. Zeigen Sie:
X ist genau dann normal, wenn es zu jeder endlichen Überdeckung $U_1, \ldots, U_n$ von X mit offenen Mengen stetige Abbildungen $f_i : X \to [0,1]$ gibt:

(i) $\sum_{i=1}^n f_i(x) = 1 \quad$ für alle $\quad x \in X$,

(ii) $f_i(x) = 0 \quad \forall\, x \in \complement_X U_i\ ,\ 1 \le i \le n.$ $\boxed{6}$

Aufgabe 4*: Sei X ein normaler topologischer Raum. Seien $A_1, \ldots, A_n$, $n \geq 1$, abgeschlossene Teilmengen von X mit der Eigenschaft

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = \emptyset.$$

Zeigen Sie, dass es offene Teilmengen $U_1, \ldots, U_n$ von X gibt, so dass

$$A_i \subset U_i \quad \text{für} \quad 1 \le i \le n \quad \text{und} \quad \bigcap_{i=1}^{n} U_i = \emptyset.$$

Aufgabe 5: (X,d) sei ein pseudometrischer Raum. Eine Folge $(x_n)_n$ in X heißt *Cauchy–Folge*, falls gilt:

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall\, m,n \geq n_0 \quad d(x_m, x_n) < \varepsilon\ .$$

Zeigen Sie, dass jede konvergente Folge eine Cauchy–Folge ist. $\boxed{3}$