LEHRSTUHL A FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. E. Görlich
Dipl.-Math. T. Heck

Aachen, den 19.05.2001

8. Übung zur Vorlesung Topologie

(Abgabe: Dienstag, 26.06.2001, bis 11.45 Uhr im Übungskasten)

Aufgabe 1: Sei $\mathbb{R}^2$ mit der natürlichen Topologie versehen und

$$A := \{(x, \sin\tfrac{2\pi}{x})\ ;\ x > 0\}.$$

a) Bestimmen Sie $\overline{A}$.

b) Zeigen Sie, dass $\overline{A}$ eine zusammenhängende Teilmenge von $\mathbb{R}^2$ ist.

c) Zeigen Sie, dass $\overline{A}$ nicht wegzusammenhängend ist, und geben Sie die Anzahl der Wegzusammenhangskomponenten von $\overline{A}$ an. $\boxed{5}$

Aufgabe 2: Sei X ein topologischer Raum und $\mathrm{Aut}(X)$ die Automorphismengruppe von X. Ist Γ eine Untergruppe von $\mathrm{Aut}(X)$, so definiert man für $x, y \in X$:

$$x \sim y \quad :\Leftrightarrow \quad \exists\ f \in \Gamma \quad \text{mit} \quad f(x) = y.$$

Zeigen Sie:

a) $\sim$ ist eine Äquivalenzrelation auf X.

b) Ist $|\Gamma| < \infty$ und X ein Hausdorff–Raum, so ist $X/\!\sim$ ein Hausdorff–Raum.

c) Kann man in b) auf die Voraussetzung $|\Gamma| < \infty$ verzichten? $\boxed{5}$

Aufgabe 3: Zeigen Sie, dass die folgenden Räume hausdorffsch sind:

a) der topologische Raum aus Aufgabe 8, 6. Übung,

b) der topologische Raum $\mathbb{R}^*$ aus Aufgabe 3 a), 2. Übung,

c) die obere Halbebene H aus Aufgabe 3 b), 2. Übung. $\boxed{6}$

Aufgabe 4: Sei $\mathcal{T}_n$ die Zariski-Topologie auf $\mathbb{K}^n$, $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$. Zeigen Sie:

a) Jede Zariski-offene Menge $A \neq \emptyset$ ist dicht in der natürlichen Topologie auf K^n.

b) $(K^n, \mathcal{T}_n)$ ist nicht Hausdorffsch. $\boxed{4}$

Aufgabe 5*: Sei $\mathbb{R}^n$ mit der natürlichen Topologie versehen, U ein $(n-1)$–dimensionaler Unterraum von $\mathbb{R}^n$, $a \in \mathbb{R}^n$ und $H := a + U$. Bestimmen Sie die Zusammenhangskomponenten von $\mathbb{R}^n \backslash H$.
Hinweis: Benutzen Sie die Hessesche Normalform von H.