LEHRSTUHL A FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. E. Görlich
Dipl.-Math. T. Heck

Aachen, den 12.05.2001

7. Übung zur Vorlesung Topologie

(Abgabe: Dienstag, 19.06.2001, bis 11.45 Uhr im Übungskasten)

Aufgabe 1: a) Zeigen Sie, dass die folgenden Mengen wegzusammenhängende Teilmengen von $M_n(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n^2}$ mit der natürlichen Topologie sind:

(i) $\mathrm{Pos}_n(\mathbb{R}) = \{P \in M_n(\mathbb{R})\ ;\ P > 0\}$ (positiv definite Matrizen),

(ii) $SO_n(\mathbb{R}) = \{U \in M_n(\mathbb{R})\ ;\ UU^t = E,\ \det U = 1\}$ (spezielle orthogonale Gruppe),

(iii) $\mathrm{Nil}_n(\mathbb{R})$ (nilpotente Matrizen). $\boxed{6}$

b) Wie sehen die Zusammenhangskomponenten der orthogonalen Gruppe $O_n(\mathbb{R})$ aus? $\boxed{2}$

c) Zeigen Sie, dass die Gruppe $GL_n(\mathbb{C})$ der invertierbaren Matrizen über $\mathbb{C}$ eine offene, wegzusammenhängende Teilmenge von $M_n(\mathbb{C}) \cong \mathbb{C}^{n^2}$ mit der natürlichen Topologie ist. $\boxed{4}$

d) Bleibt die Aussage in c) richtig, wenn man $\mathbb{C}$ durch $\mathbb{R}$ ersetzt? $\boxed{1}$

Aufgabe 2: Für $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ sei $S^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1}\ ;\ ||x||_{eukl} = 1\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ die n–Sphäre, versehen mit der Spurtopologie von $(\mathbb{R}^{n+1}, \mathcal{T}_{nat})$. Zeigen Sie:

a) Für $n \in \mathbb{N}$ ist S^n zusammenhängend. Was gilt für $n = 0$? $\boxed{3}$

b) Ist $n \geq 2$ und $M \subset \mathbb{R}^n$ abzählbar, so ist $(\mathbb{R}^n \setminus M, \mathcal{T}_{rel})$ zusammenhängend. $\boxed{4}$

Aufgabe 3: Sei $M_n(\mathbb{R})$ wieder mit der natürlichen Topologie versehen und $M := \{A \in M_n(\mathbb{R})\ ;\ \mathrm{Spur}(A) \neq 0\}$.

a) Zeigen Sie, dass M offen und dicht in $M_n(\mathbb{R})$ ist. $\boxed{2}$

b) Zeigen Sie, dass M nicht zusammenhängend ist. $\boxed{2}$

c) Wie sehen die Zusammenhangskomponenten von M aus? $\boxed{2}$

Aufgabe 4: Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $\sim$ die Relation auf X, so dass für x, $y \in X$ die Relation $x \sim y$ genau dann besteht, wenn ein Weg $f : [0,1] \to X$ mit $f(0) = x$ und $f(1) = y$ existiert. Zeigen Sie:

a) $\sim$ ist eine Äquivalenzrelation. $\boxed{2}$

b) Für $x \in X$ ist die Wegzusammenhangskomponente $W(x) := \{y \in X\ ;\ y \sim x\}$ die grösste x enthaltende, wegzusammenhängende Teilmenge von X. $\boxed{2}$

c) $W(x) = C(x)$ für alle $x \in X$, falls jeder Punkt eine offene, wegzusammenhängende Umgebung besitzt. $\boxed{2}$

Aufgabe 5*: Seien A und B disjunkte abgeschlossene Mengen eines metrischen Raumes X. Zeigen Sie, dass es eine stetige Abbildung $f : X \to [0,1]$ mit $A = f^{-1}(\{0\})$ und $B = f^{-1}(\{1\})$ gibt.