LEHRSTUHL A FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. E. Görlich
Dipl.-Math. T. Heck

Aachen, den 29.05.2001

6. Übung zur Vorlesung Topologie

(Abgabe: Dienstag, 12.06.2001, bis 11.45 Uhr im Übungskasten)

Aufgabe 1: Zeigen Sie:
a) Sind $(X,\mathcal{T}),(Y,\mathcal{T}')$ topologische Räume und $A\subset X, B\subset Y$, so gilt $\operatorname{int}(A\times B)=(\operatorname{int}A)\times(\operatorname{int}B)$.
b) Sind $(X_i,\mathcal{T}_i), i\in I$, topologische Räume und $A_i\subset X_i, i\in I$, so gilt $\prod_{i\in I}(\operatorname{int}A_i)\supset\operatorname{int}(\prod_{i\in I}A_i)$.
c) In b) gilt i.A. nicht Gleichheit. $\boxed{5}$

Aufgabe 2: Sei X ein topologischer Raum und $A\subset X$ beliebig.
Zeigen Sie, dass es einen topologischen Raum Y und zwei stetige Abbildungen $f,g: X\to Y$ gibt mit

$$\{x\in X\ ;\ f(x)=g(x)\}=A.$$

Hinweis: Wählen Sie für Y einen geeigneten Quotientenraum von $X\times\{1,2\}$. $\boxed{4}$

Aufgabe 3: Auf $(\mathbb{R}^2,\mathcal{T}_{nat})$ seien Äquivalenzrelationen R_1, R_2 definiert durch
(i) $((x_1,x_2),(y_1,y_2))\in R_1 \iff x_1^2+x_2^2=y_1^2+y_2^2$,
(ii) $((x_1,x_2),(y_1,y_2))\in R_2 \iff (x_1=y_1=0\wedge x_2=y_2)\vee x_1=y_1\neq 0$.
$\mathbb{R}^2/R_j$ sei jeweils mit der Quotiententopologie $\mathcal{T}_{R_j}$ versehen.
a) Zu welchem bekannten topologischen Raum ist $\mathbb{R}^2/R_1$ homöomorph?
b) Bestimmen Sie $\mathbb{R}^2/R_2$ und zeigen Sie, dass es $[x]$, $[y]\in\mathbb{R}^2/R_2$ mit $[x]\neq[y]$ und $U\cap V\neq\emptyset$ für alle $U\in\mathcal{T}([x])$ und alle $V\in\mathcal{T}([y])$ gibt. $\boxed{2}$

Aufgabe 4: Sei $(X,\mathcal{T})$ ein topologischer Raum.
a) Zeigen Sie, dass die Zusammenhangskomponenten von X eine Partition von X bilden.
b) $A\subset X$ heißt Zerlegungsmenge von X, falls A offen und abgeschlossen ist. Für $x\in X$ sei $C(x)$ die Zusammenhangskomponente von X, die x enthält, und $Q(x):=\bigcap\{A\subset X\mid x\in A$ und A Zerlegungsmenge von $X\}$. Man nennt $Q(x)$ die Quasikomponente von x. Zeigen Sie:
(i) Für jedes $x\in X$ ist $Q(x)$ abgeschlossen in X.
(ii) $\{Q(x)\ ;\ x\in X\}$ ist eine Partition von X.
(iii) Für jedes $x\in X$ gilt $C(x)\subset Q(x)$.
(iv) $C(x)$ ist genau dann offen, wenn $Q(x)$ offen ist. In diesem Fall gilt $C(x)=Q(x)$. $\boxed{3}$

Aufgabe 5: Bestimmen Sie die Zusammenhangskomponenten von $(X,\mathcal{T})$, falls
(i) $\mathcal{T}=\mathcal{T}_A:=\{U\subset X\ ;\ A\subset U$ oder $U=\emptyset\}$ für ein $A\subset X$ ist,
(ii) $\mathcal{T}=\mathcal{T}_{\mathcal{P}}$ Partitionstopologie für eine Partition $\mathcal{P}$ von X ist,
(iii) $\mathcal{T}=\mathcal{T}_d$ für eine Ultrametrik d auf X ist. $\boxed{3}$

Aufgabe 6:

a) Seien $(X,\mathcal{T})$, $(X,\mathcal{T}')$ zwei topologische Räume, $\mathcal{T}$ feiner als $\mathcal{T}'$ und $Y \subset X$. Zeigen Sie: Ist Y als Unterraum von $(X,\mathcal{T})$ zusammenhängend, so ist Y auch als Unterraum von $(X,\mathcal{T}')$ zusammenhängend. $\boxed{2}$

b) Zeigen Sie: Die natürliche Topologie $\mathcal{T}$ auf $\mathbb{R}^n$ $(\mathbb{C}^n)$ ist feiner als die Zariski–Topologie $\mathcal{T}_Z$ auf $\mathbb{R}^n$ $(\mathbb{C}^n)$. Folgern Sie:

$$(\mathbb{R}^n,\mathcal{T}_Z)\ ,\ (\mathbb{C}^n,\mathcal{T}_Z) \quad \text{sind zusammenhängend .}$$ $\boxed{2}$

Aufgabe 7: Mittels des Zusammenhangs zeige man, dass $(\mathbb{R},\mathcal{T}_{nat})$ und $(\mathbb{R}^n,\mathcal{T}_{nat})$ für $n \geq 2$ nicht homöomorph sind. $\boxed{5}$

Aufgabe 8*: Sei $\mathbb{K}$ ein Körper, versehen mit der diskreten Topologie, $V \neq \{0\}$ ein $\mathbb{K}$–Vektorraum und $\mathcal{U} := \{U \mid U \text{ Unterrraum von } V \text{ mit } \dim(V/U) < \infty\}$. Zeigen Sie:
a) $\mathcal{B} := \{x+U\ ;\ x \in V,\ U \in \mathcal{U}\}$ ist Basis einer Topologie $\mathcal{T}$ auf V.
Betrachten Sie nun den topologischen Raum $(V,\mathcal{T})$. Zeigen Sie weiter:
b) Die Elemente von $\mathcal{B}$ sind abgeschlossen.
c) V ist genau dann diskret, wenn $\dim V < \infty$.
d) Endomorphismen von V sind stetige Abbildungen.
e) Die Abbildungen $V \times V \to V$, $(x,y) \mapsto x+y$ und $\mathbb{K} \times V \to V$, $(\alpha,x) \mapsto \alpha x$ (Skalarmultiplikation) sind stetig.
f) Ist $(b_i)_{i\in I}$ Basis von V, so ist die Abbildung $f : V \to \mathbb{K}^I$, $v := \sum_{i\in I} \alpha_i b_i \mapsto (\alpha_i)_{i\in I}$ injektiv und stetig. Ist f offen?