LEHRSTUHL A FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. E. Görlich
Dipl.-Math. T. Heck

Aachen, den 22.05.2001

5. Übung zur Vorlesung Topologie

(Abgabe: Dienstag, 29.05.2001, bis 11.45 Uhr im Übungskasten)

Aufgabe 1: a) Sei $\mathcal{T}_{nat}$ die natürliche Topologie auf $\mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass $\mathcal{B} := \mathcal{T}_{nat} \cup \mathcal{U}(\infty)$ mit

$$\mathcal{U}(\infty) := \{\{\infty\} \cup \{x \in \mathbb{R}\ ;\ |x| > n\} \mid n \in \mathbb{N}\}$$

Basis einer Topologie auf $\mathbb{R}_\infty := \mathbb{R} \dot{\cup} \{\infty\}$ ist. Diese Topologie sei $\mathcal{T}_\infty$.
b) Welche der Räume $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{nat})$, $(\mathbb{R}_\infty, \mathcal{T}_\infty)$, $([0,1], \mathcal{T}_{nat})$ und $(S^1, \mathcal{T}_{nat})$ sind homöomorph? (Dabei sei $S^1 := \{x \in \mathbb{R}^2; |x| = 1\}$.) $\boxed{4}$

Aufgabe 2: Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:
(i) $\mathcal{T}$ ist eine Partitionstopologie auf X.
(ii) Es existiert ein diskreter Raum Y und eine Abbildung $f : X \to Y$, so dass $\mathcal{T}$ die Initialtopologie von $(f : X \to Y)$ ist. $\boxed{4}$

Aufgabe 3: a) Sei $X := \mathbb{R}$. Bestimmen Sie die bezüglich der Menge aller monoton wachsenden Funktionen $f : X \to (\mathbb{R}, \mathcal{T}_{nat})$ initiale Topologie auf X. $\boxed{3}$
b) Sei $\mathbb{K}$ ein Körper.
Wie läßt sich die Zariskitopologie auf $\mathbb{K}^n$ als Initialtopologie darstellen? $\boxed{3}$

Aufgabe 4: Seien $(Y, \mathcal{T}_{rel})$ ein topologischer Unterraum des nichtleeren topologischen Raumes $(X, \mathcal{T})$ und $A \subset Y$. Zeigen Sie:

a) $\overset{\circ}{A} \subset B$, wobei B der offene Kern von A in der Relativtopologie auf Y ist. $\boxed{1}$

b) $C \subset Y \cap \partial A$, wobei C der Rand von A in der Relativtopologie auf Y ist. $\boxed{2}$

c) Zeigen Sie an Beispielen, dass weder in a) noch in b) Gleichheit gelten muss. $\boxed{2}$

Aufgabe 5:

a) Λ heißt Gitter im $\mathbb{R}^n$, wenn es eine Basis $b_1, \ldots, b_n$ von $\mathbb{R}^n$ gibt mit $\Lambda = \mathbb{Z}b_1 + \ldots + \mathbb{Z}b_n$. Wir betrachten $\mathbb{R}^n$ mit der natürlichen Topologie und zwei Gitter Λ, Λ' im $\mathbb{R}^n$.
Zeigen Sie, dass die Quotientenräume $\mathbb{R}^n/\Lambda$ und $\mathbb{R}^n/\Lambda'$ homöomorph sind. $\boxed{2}$

b) [Der Fall $n = 2$]. Zeigen Sie, dass der Quotientenraum $\mathbb{C}/(\mathbb{Z}+\mathbb{Z}i)$ homöomorph zum 2–dimensionalen Torus

$$T^2 = \{(z,\omega) \in \mathbb{C}\times\mathbb{C}\ ;\ |z| = |\omega| = 1\} = S^1 \times S^1$$

mit der Relativtopologie von $\mathbb{C}\times\mathbb{C}$ ist.
($\mathbb{C}$ sei mit der natürlichen Topologie versehen.) $\boxed{2}$

Aufgabe 6*: Sei $B_n := \{x \in \mathbb{R}^n\ ;\ ||x|| \leq 1\}$ und $X \subset \mathbb{R}^n$ eine abgeschlossene beschränkte konvexe Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ mit nichtleerem Innern. X und B_n seien jeweils mit der natürlichen Topologie versehen. Zeigen Sie, dass X und B_n homöomorph sind.