LEHRSTUHL A FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. E. Görlich
Dipl.-Math. Thorsten Heck

Aachen, den 15.05.2001

4. Übung zur Vorlesung Topologie

(Abgabe: Dienstag, 22.05.2001, bis 11.45 Uhr im Übungskasten)

Hinweise

Ab sofort findet die Diskussionsstunde von Lars Schroeren nicht mehr mittwochs, sondern dienstags von 14.00 bis 15.30 Uhr im Hörsaal H212 statt. Die Diskussionsstunden am 24.5. sowie am 14.6. entfallen, bitte weichen Sie in diesen Wochen auf den Dienstagstermin aus.

Aufgabe 1: Sei $\mathbb{N}$ versehen mit der kofiniten Topologie. f, g, $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ seien definiert durch $f(1) = g(1) = h(1) := 1$ und

$$f(n) := \max\{k \in \mathbb{N}\,;\ k|n \text{ und } k < n\},$$
$$g(n) := \max\{k \in \mathbb{N}\,;\ k|n \text{ und } k \text{ prim}\},$$
$$h(n) := \begin{cases} n, & \text{falls } n \text{ prim}, \\ n - g(n), & \text{sonst.} \end{cases}$$

für $n \geq 2$. Untersuchen Sie die Abbildungen f, g und h auf Stetigkeit. $\boxed{4}$

Aufgabe 2: Die Menge $M_n(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n^2}$ der reellen $n \times n$–Matrizen sei mit der natürlichen Topologie versehen. Untersuchen Sie, welche der folgenden Mengen abgeschlossene oder offene Teilmengen von $M_n(\mathbb{R})$ sind:

(i) $\mathrm{Sym}_n(\mathbb{R}) = \{S \in M_n(\mathbb{R}); S^t = S\}$ (symmetrische Matrizen),
(ii) $\mathrm{Alt}_n(\mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}); A^t = -A\}$ (schiefsymmetrische Matrizen),
(iii) $\mathrm{O}_n(\mathbb{R}) = \{U \in M_n(\mathbb{R}); UU^t = U^tU = E\}$ (orthogonale Gruppe),
(iv) $SL_n(\mathbb{R})$ (spezielle lineare Gruppe),
(v) $GL_n(\mathbb{R})$ (allgemeine lineare Gruppe),
(vi) $\mathrm{Nil}_n(\mathbb{R}) = \{N \in M_n(\mathbb{R})\,;\ \exists k \in \mathbb{N}\ \ N^k = 0\}$ (nilpotente Matrizen). $\boxed{4}$

Aufgabe 3: Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum mit $X \neq \emptyset$. Sei $\mathcal{T}^*$ die Topologie auf $\mathbb{R}^*$ aus Aufgabe 3, Blatt 2. Zeigen Sie:

a) Eine Abbildung $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ ist genau dann stetig, wenn $f|_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig ist und die beiden Limiten $\lim\limits_{x \to +\infty} f|_{\mathbb{R}}(x)$ bzw. $\lim\limits_{x \to -\infty} f|_{\mathbb{R}}(x)$ existieren und mit $f(+\infty)$ bzw. $f(-\infty)$ übereinstimmen.

b) Eine Abbildung $f : X \to \mathbb{R}^*$ ist genau dann stetig, wenn für jedes $c \in \mathbb{R}$ die Mengen $\{x \in X; f(x) > c\}$ und $\{x \in X; f(x) < c\}$ offen sind.

c) Sind $f_j : X \to \mathbb{R}^*$, $j = 1, \ldots, n$, stetig, so sind auch die durch

$$M(x) := \max_{1 \leq j \leq n} f_j(x) \text{ und } m(x) := \min_{1 \leq j \leq n} f_j(x)$$

definierten Abbildungen $M : X \to \mathbb{R}^*$ und $m : X \to \mathbb{R}^*$ stetig.

d) Für $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 0$, definiere man $g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^*$ durch $g_n(x) = x^{-n}$ für $x \neq 0$ und $g_n(0) := +\infty$. Welche der Abbildungen g_n sind stetig? $\boxed{6}$

Aufgabe 4: Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum.
a) Zeigen Sie, dass Automorphismengruppen homöomorpher topologischer Räume isomorph sind.
b) Zeigen Sie an einem Beispiel, dass aus der Isomorphie der Automorphismengruppen noch nicht die Homöomorphie der topologischen Räume folgt. $\boxed{3}$

Aufgabe 5: Sei $\mathbb{K}$ ein Körper, $\mathcal{T}_n$ die Zariski–Topologie auf $\mathbb{K}^n$ und $p : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ eine polynomiale Abbildung, d.h. es existieren Polynomfunktionen $p_1, \dots, p_m : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ mit

$$p(x) = (p_1(x), \dots, p_m(x)) \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{K}^n.$$

Zeigen Sie, dass $p : (\mathbb{K}^n, \mathcal{T}_n) \to (\mathbb{K}^m, \mathcal{T}_m)$ stetig ist. $\boxed{4}$

Aufgabe 6*: (Diese Aufgabe kann von zwei Personen vorgerechnet werden, Teil d) steht dabei dann alleine.)
a) Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume, $\lambda \geq 0$ und $f : X \to Y$ eine Abbildung mit

$$d_Y(f(x), f(y)) \leq \lambda d_X(x,y) \qquad \text{für alle } x, y \in X.$$

Zeigen Sie, dass f stetig ist. Wenn $\lambda < 1$ ist, nennt man f eine Kontraktion mit Lipschitzkonstante λ.
b) Sei (X, d) ein metrischer Raum, $f : X \to X$ eine Kontraktion mit Lipschitzkonstante $\lambda < 1$ und $x_1 \in X$. $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei induktiv definiert durch $x_{n+1} = f(x_n)$ für $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie:

(i) Für $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m > n$ ist $d(x_m, x_n) < \dfrac{\lambda^{n-1}}{1-\lambda} d(x_1, x_2)$.

(ii) Wenn f einen Fixpunkt hat, so ist dieser eindeutig.

c) Sei $C([0,1]) := \{f : [0,1] \to \mathbb{R} \mid f \text{ stetig}\}$, wobei $[0,1]$ und $\mathbb{R}$ mit der natürlichen Topologie versehen seien. Für $f, g \in X$ sei $d(f,g) := \sup_{x\in[0,1]} |f(x) - g(x)|$. Zeigen Sie, dass d eine Metrik auf $C([0,1])$ ist.
d) Sei $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Kontraktion. Für $f \in C([0,1])$ sei $T_\gamma f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definiert durch $(T_\gamma f)(x) = \int_0^x \gamma(f(t))\,dt$. Zeigen Sie:

(i) $T_\gamma : C([0,1]) \to C([0,1])$ ist eine Kontraktion.

(ii) Es gibt genau ein $f \in C([0,1])$ mit $f(x) = \int_0^x \gamma(f(t))\,dt$.

(iii) Die in (ii) charaktrisierte Funktion f ist differenzierbar und erfüllt die Differentialgleichung $f' = \gamma \circ f$ und die Anfangsbedingung $f(0) = 0$.