LEHRSTUHL A FÜR MATHEMATIK

Prof. Dr. E. Görlich

Dipl.-Math. Thorsten Heck

Aachen, den 08.05.2001

3. Übung zur Vorlesung Topologie

(Abgabe: Dienstag, 15.05.2001, bis 11.45 Uhr im Übungskasten)

Aufgabe 1: Sei X eine Menge und $^{-} : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ eine Abbildung mit folgenden Eigenschaften:

(1) $\overline{\emptyset} = \emptyset$;

(2) für alle $A \subset X$ gilt $A \subset \overline{A}$;

(3) für alle $A \subset X$ gilt $\overline{\overline{A}} \subset \overline{A}$;

(4) für alle $A, B \subset X$ gilt $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

Zeigen Sie, dass auf X eine eindeutig bestimmte Topologie existiert, so dass $\overline{A}$ für alle $A \subset X$ die abgeschlossene Hülle von A in dieser Topologie ist. $\boxed{4}$

Aufgabe 2: Gibt es eine Metrik d auf $\mathbb{R}^n$, so dass zum einen $A \in \mathcal{T}_d$, falls $0 \notin A$, und zum andern jede ε–Kugel um 0 bezüglich d auch eine ε'–Kugel um 0 bezüglich der Euklidischen Metrik (Metrik d aus Beispiel (3.5)d)) ist? Gilt in $\mathcal{T}_d$ gegebenenfalls das zweite Abzählbarkeitsaxiom? $\boxed{4}$

Aufgabe 3*: Zeigen Sie, dass in einem pseudometrischen Raum jede abgeschlossene Menge als Durchschnitt von abzählbar vielen offenen Mengen darstellbar ist. Zeigen Sie weiter durch ein Beispiel, dass dies in allgemeinen topologischen Räumen nicht richtig ist. $\boxed{4}$

Aufgabe 4: Sei (X,d) ein pseudometrischer Raum und $A \subset X$, $A \neq \emptyset$, $A \neq X$. Zeigen Sie, dass $x \in X$ genau dann ein Randpunkt von A ist, wenn $d(x,A) = d(x, \complement_X A) = 0$ gilt. $\boxed{3}$

Aufgabe 5: Sei H die nicht-euklidische Ebene aus Aufgabe 3, Übung 2. Beweisen oder widerlegen Sie für $p : H \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto x$:

a) p ist stetig.

b) p ist offen.

c) p ist abgeschlossen.

$\boxed{4}$

Aufgabe 6: a) Sei (X,d) ein metrischer Raum. Zeigen Sie:

(i) Auf $X \times X$ wird durch $\delta((x_1,x_2),(y_1,y_2)) := \sqrt{d(x_1,y_1)^2 + d(x_2,y_2)^2}$ eine Metrik definiert.

(ii) Die Abbildung $X \times X \to \mathbb{R}$, $(x_1,x_2) \mapsto d(x_1,x_2)$ ist stetig (bezüglich $\mathcal{T}_\delta$ und $\mathcal{T}_{nat}$). $\boxed{4}$