

2. Übung zur Vorlesung Topologie

(Abgabe: Dienstag, 8.5.2001, bis 11.45 Uhr im Übungskasten)

Aufgabe 1: Sei $\mathcal{T} := \{\emptyset, \{2\}, [0, 2], [2, 4), [0, 4), \mathbb{R}\} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$.

a) Zeigen Sie, daß \mathcal{T} eine Topologie für \mathbb{R} ist. Ist \mathcal{T} feiner oder gröber als \mathcal{T}_{nat} ?

b) Geben Sie zu jedem $x \in \mathbb{R}$ das Umgebungssystem $\mathcal{U}(x, \mathcal{T})$ an.

c) Bestimmen Sie alle Häufungspunkte von $A = (1, 3)$ bezüglich \mathcal{T} . 3

Aufgabe 2: Sei X eine Menge. Eine Teilmenge $\mathcal{P} \neq \emptyset$ der Potenzmenge $\mathcal{P}(X)$ heißt eine *Partition* von X , wenn je zwei Elemente von \mathcal{P} disjunkt sind und $\cup_{P \in \mathcal{P}} P = X$ gilt.

a) Sei \mathcal{P} eine Partition von X . Zeigen Sie, dass \mathcal{P} die Basis einer Topologie $\mathcal{T}_{\mathcal{P}}$ auf X ist. Diese Topologie heißt *Partitionstopologie* (zur Partition \mathcal{P}). Welche Partitionen muss man betrachten, um die diskrete bzw. indiskrete Topologie auf X zu erhalten? 2

b) Sei \mathcal{T} eine Topologie auf X . Zeigen Sie die Äquivalenz der beiden folgenden Aussagen:

(i) \mathcal{T} stimmt mit der Menge der abgeschlossenen Teilmengen von X überein.

(ii) Es gibt eine Partition \mathcal{P} von X mit $\mathcal{T} = \mathcal{T}_{\mathcal{P}}$. 3

Aufgabe 3:

a) Sei \mathcal{T}_n die natürliche Topologie auf \mathbb{R} , $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ und

$$\mathcal{B} = \mathcal{T}_n \cup \{]a, +\infty[\cup \{+\infty\} ; a \in \mathbb{R} \} \cup \{]-\infty, b[\cup \{-\infty\} ; b \in \mathbb{R} \}.$$

Zeigen Sie:

\mathcal{B} ist Basis einer Topologie \mathcal{T}^* auf \mathbb{R}^* . 3

b) Im \mathbb{R}^2 definiert man die obere Halbebene durch

$$H := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; y \geq 0\}.$$

Für $r > 0$ und $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ ist

$$K_r(x_0, y_0) := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < r^2\}$$

die offene Kreisscheibe mit Mittelpunkt (x_0, y_0) und Radius r .

Zeigen Sie, dass

$$\mathcal{B} := \{K_r(x, y) ; (x, y) \in H, 0 < r \leq y\} \cup \{K_r(x, r) \cup \{(x, 0)\} ; x \in \mathbb{R}, r > 0\}$$

Basis einer Topologie \mathcal{T} auf H ist. 3

Aufgabe 4: Zeigen Sie, dass

$$\mathcal{B} := \{[a, b[; a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$$

Basis einer Topologie \mathcal{T} ist und dass $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ das erste, aber nicht das zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllt.

4

Aufgabe 5: Sei (X, \mathcal{T}) ein topologischer Raum und $A, B \subset X$. Zeigen Sie:

a) $x \in A' \Rightarrow x \in (A \setminus \{x\})'$.

2

b) $(A \cup B)' = A' \cup B'$.

3

c) $x \in \bar{A} \Leftrightarrow (A \cap U) \neq \emptyset$ für alle $U \in \mathcal{U}(x)$.

2

Aufgabe 6*: Sei R ein kommutativer Ring mit 1. Sei $\text{Max}(R)$ die Menge der maximalen Ideale in R . Für jede Teilmenge $\mathcal{S} \subseteq \text{Max}(R)$ sei

$$\bar{\mathcal{S}} := \{M \in \text{Max}(R); \bigcap_{S \in \mathcal{S}} S \subseteq M\}.$$

Zeigen Sie: Es gibt genau eine Topologie auf $\text{Max}(R)$, für die $\bar{\mathcal{S}}$ der Abschluss von \mathcal{S} für jede Teilmenge $\mathcal{S} \subseteq \text{Max}(R)$ ist.

4

Bemerkung Bitte beachten Sie den Übungstermin am 3. 5., 14:00 Uhr, Be 225.