LEHRSTUHL A FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. E. Görlich
Dipl.-Math. T. Heck

Aachen, den 10.07.2001

11. Übung zur Vorlesung Topologie

(Abgabe: Dienstag, 17.07.2001, bis 11.45 Uhr im Übungskasten)

Aufgabe 1: Sei A eine Teilmenge des topologischen Raumes X und $x \in X$.
Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

(i) $x \in \overline{A}$.

(ii) $A \cap \mathcal{U}(x) := \{A \cap U \; ; \; U \in \mathcal{U}(x)\}$ ist ein Filter auf A.

(iii) Es gibt einen Filter $\mathcal{G}$ auf A, so dass der von $\mathcal{G}$ auf X erzeugte Filter $\mathcal{F}_{\mathcal{G}}$ gegen x konvergiert. $\boxed{6}$

Aufgabe 2: Geben Sie jeweils eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Quasi–Kompaktheit der folgenden topologischen Räume an.

(i) $(X, \mathcal{T}_A)$ aus Aufgabe 2, 1. Übung. $\boxed{3}$

(ii) $(X, \mathcal{T}_{\mathcal{P}})$, wobei $\mathcal{P}$ eine Partition von X ist und $\mathcal{T}_{\mathcal{P}}$ die zugehörige Topologie. $\boxed{3}$

(iii) V aus Aufgabe 8, 5. Übung. $\boxed{3}$

Aufgabe 3: Welche der folgenden topologischen Räume sind kompakt oder quasi–kompakt?

(i) $(\mathbb{R}^*, \mathcal{T}^*)$ aus Aufgabe 3a), 2. Übung. $\boxed{3}$

(ii) H aus Aufgabe 3b), 2. Übung. $\boxed{3}$

Aufgabe 4: Welche der folgenden Teilmengen von $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sind kompakt?

(i) Die Gruppe $O_n(\mathbb{R})$ der orthogonalen Matrizen. $\boxed{3}$

(ii) Die Menge $\mathcal{N}_n(\mathbb{R})$ der nilpotenten Matrizen. $\boxed{3}$

(iii) $\{S \in \mathrm{Psd}_n(\mathbb{R}) \; ; \; \text{Spur } S \leq 1\}$, wobei $\mathrm{Psd}_n(\mathbb{R})$ wieder die Menge der positiv semidefiniten Matrizen über $\mathbb{R}$ bezeichne. $\boxed{3}$

Aufgabe 5*: (Das Heiratsproblem nach *Halmos* und *Vaughan*)
Sei H eine Menge von Herren und D eine Menge von Damen. Für jeden Herrn h sei $F(h) \neq \emptyset$ die Menge aller Damen aus D, die mit h befreundet sind. Jeder Herr h soll nun mit einer Dame aus seinem Freundeskreis verheiratet werden, das heißt, es gilt, eine injektive Abbildung

$$f : H \to D \quad \text{mit} \quad f(h) \in F(h) \quad \text{für alle} \quad h \in H$$

zu finden. Offenbar ist hierfür folgende Bedingung notwendig:

(P) Sind $h_1, \ldots, h_n$ paarweise verschiedene Herren, dann gilt $|\bigcup_{i=1}^n F(h_i)| \geq n$.

Zeigen Sie:

(i) Ist H endlich und (P) erfüllt, dann besitzt das Heiratsproblem eine Lösung. *Hinweis:* Vollständige Induktion nach $|H|$. $\boxed{3}$

(ii) Ist H unendlich, $F(h)$ für alle $h \in H$ endlich und (P) erfüllt, dann besitzt das Heiratsproblem eine Lösung.
Hinweis: Sei $F(h)$ mit der diskreten Topologie versehen. Betrachten Sie $X := \Pi_{h \in H} F(h)$, und wenden Sie den *Satz von Tychonov* an. $\boxed{5}$

Hinweis Die Punkte von Aufgabe 5 zählen nicht mit zu der Gesamtzahl aller erreichbarer Punkte. Wird die Aufgabe abgegeben, so werden die Punkte natürlich dem/den Studierenden gutgeschrieben. Die Aufgabe kann auch noch vorgerechnet werden (Lehramtskandidaten), dies ist jedoch spätestens in der Übung am 17.7.2001 anzukündigen (sonst wird die Aufgabe dort vorgerechnet.)

Hinweis zur Klausur am 16.7.2001 Die Klausur findet statt im AM um 16:00. Klausurrelevant sind die Kapitel I bis IV der Vorlesung. Es werden auch Definitionen und Sätze abgefragt, diese können auch aus dem Stoff bis zur letzten Vorlesung vor der Klausur (13.7.) stammen.
Bezeichnungen und Ergebnisse der Übungsaufgaben sowie der Aufgaben im Skript werden nicht vorausgesetzt.