LEHRSTUHL A FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. E. Görlich
Dipl.-Math. T. Heck

Aachen, den 03.07.2001

10. Übung zur Vorlesung Topologie

(Abgabe: Dienstag, 10.07.2001, bis 11.45 Uhr im Übungskasten)

Aufgabe 1: Für $x, y \in \mathbb{R}$ sei $d(x,y) := \left| \frac{x}{1+|x|} - \frac{y}{1+|y|} \right|$. Zeigen Sie:

a) d ist eine Metrik auf $\mathbb{R}$, welche die natürliche Topologie induziert.
Hinweis: Benutzen Sie den Mittelwertsatz der Differentialrechnung. $\boxed{4}$

b) Geben Sie eine Cauchy–Folge in $(\mathbb{R}, d)$ an, die nicht konvergiert. $\boxed{2}$

Aufgabe 2: Zeigen Sie:

a) $Psd_n(\mathbb{R}) = \overline{\mathcal{P}_n(\mathbb{R})}$. Dabei sei $Psd_n(\mathbb{R})$ die Menge der positiv semidefiniten $n \times n$-Matrizen über $\mathbb{R}$. $\boxed{3}$

b) $GL_n(\mathbb{R})$ ist eine dichte Teilmenge von $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. $\boxed{3}$

c) $\mathcal{D}_n(\mathbb{C})$ ist eine dichte Teilmenge von $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Hier sei $\mathcal{D}_n(\mathbb{C})$ die Menge der diagonalisierbaren Matrizen über $\mathbb{C}$. $\boxed{3}$

Aufgabe 3: Sei X eine nicht–leere Menge, $\mathcal{A}$ ein Filter auf X und

$$\mathcal{B} := \{ B \subset X \mid X \backslash B \text{ endlich} \}.$$

Beweisen Sie die Äquivalenz der beiden Aussagen

(i) $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$.

(ii) $\bigcap_{A \in \mathcal{A}} A = \emptyset$. $\boxed{3}$

Aufgabe 4: Sei $\emptyset \neq X$ endlich. Zeigen Sie, dass jeder Filter auf X von der Form

$$\mathcal{F}_A := \{ B \, ; \, A \subset B \subset X \}, \; \emptyset \neq A \subset X$$

ist. Wie sehen die Ultrafilter aus? $\boxed{3}$

Aufgabe 5: Sei X unendlich. Zeigen Sie, dass auf X ein nicht–trivialer Ultrafilter existiert. $\boxed{3}$