Lehrstuhl A für Mathematik
Prof. Dr. A. Krieg, A. Marschner Aachen, den 19. Juli 2001

13. Übung zur Analysis IV

Abgabe: Freitag, 10.08.2001, 12.00 Uhr

Aufgabe 1 (je 2 Punkte):
Man bestimme die Residuen der folgenden Funktionen in allen ihren Singularitäten:

a)
$$\frac{1-\cos z}{z^2},$$

b)
$$\frac{1}{(z^2+1)^3},$$

c)
$$z \exp\left(\frac{1}{1-z}\right),$$

d)
$$\frac{1}{\sin(\pi z)}.$$

Aufgabe 2 (3+3 Punkte):
Seien f, g holomorph in $a \in \mathbb{C}$. Man zeige:

a) Hat g in a eine Nullstelle 1. Ordnung, so gilt
$$\mathrm{Res}_a\left(\frac{f}{g^2}\right) = \frac{f'(a)g'(a) - f(a)g''(a)}{(g'(a))^3}.$$

b) Hat g in a eine Nullstelle 2. Ordnung, so gilt
$$\mathrm{Res}_a\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{6f'(a)g''(a) - 2f(a)g'''(a)}{3(g''(a))^2}.$$

Aufgabe 3 (je 3 Punkte):
Man berechne für $a \in (0;1)$:

a)
$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos(2t)}{1-2a\cos(t)+a^2}\,\mathrm{dt},$$

b)
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(\pi x)}{x^2+2x+5}\,\mathrm{dx},$$

c)

$$\int_0^\infty \frac{x^4}{x^6+1}\,\mathrm{dx},$$

d)

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{x^2\cos x}{x^4-1}\,\mathrm{dx}\,.$$

Aufgabe 4 (4+3 Punkte)

a) Sei $0 \neq w \in \mathbb{C}$. Es sei f eine in dem Gebiet

$$T_w = \{z \in \mathbb{C};\, a < \operatorname{Im}\left(\frac{2\pi}{w} z\right) < b\}$$

holomorphe Funktion mit der Periode w, d. h. $f(z+w) = f(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie: Dann besitzt f eine eindeutige Darstellung als Fourier-Reihe

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \exp(\frac{2\pi i}{w} nz),$$

die auf T_w lokal gleichmäßig gegen f konvergiert. Für $z_0 \in T_w$ und $n \in \mathbb{Z}$ gilt:

$$a_n = \frac{1}{w}\int_{[z_0;z_0+w]} f(\zeta)\exp\left(-\frac{2\pi i}{w} n\zeta\right)\mathrm{d}\zeta, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

b) Berechnen Sie die Fourier-Reihe zu $\frac{1}{\cos z}$.

Aufgabe 5 (6+2 Punkte):

a) Sei $R(x)$ eine auf $\mathbb{R}_+$ polstellenfreie, rationale Funktion mit $R(0) \neq 0$ und

$$\lim_{x\to\infty} x^\lambda |R(x)| = 0,$$

wobei $\lambda \in \mathbb{R}$ ist mit $\lambda > 0$. Ist

$$f(z) = (-z)^{\lambda-1} R(z), \quad z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$$

mit $(-z)^{\lambda-1} := \exp((\lambda-1)\operatorname{Log}(-z))$, dann gilt

$$\int_0^\infty x^{\lambda-1} R(x)\,\mathrm{dx} = \frac{\pi}{\sin(\lambda\pi)} \sum_{a \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_+} \operatorname{Res}_a(f).$$

b) Mit $a \in \mathbb{R}_+^*$ berechne man das Integral $\int_0^\infty \frac{x^{\lambda-1}}{x+a}\,\mathrm{dx}\,.$

Hinweis: Man betrachte ein Integrationsgebiet wie in der Skizze und lasse $r \to \infty$ gehen.

Aufgabe 6* (10* Punkte):
Sei $\zeta(s)$ die RIEMANNsche Zetafunktion und $\Psi(s) = (1-2^{1-s})\zeta(s)$ für $\mathrm{Re}(s) > 1$. (wohldefiniert?)
Man zeige:

a)
$$\zeta(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty \frac{t^{s-1}}{e^t - 1}\,\mathrm{dt} \quad \text{für} \quad \mathrm{Re}(s) > 1.$$

b)
$$\Psi(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty \frac{t^{s-1}}{e^t + 1}\,\mathrm{dt} \quad \text{für} \quad \mathrm{Re}(s) > 1.$$

c) Die Integraldarstellung aus b) stellt eine holomorphe Funktion dar für $\mathrm{Re}(s) > 0$.

d) $\zeta(s)$ lässt sich in die Halbebene $\mathrm{Re}(s) > 0$ meromorph fortsetzen und hat höchstens Pole in $s = 1$ oder $s = 1 \pm \frac{2k\pi i}{\log 2}$ für $k \in \mathbb{Z}$.

e) Führe die Aufgabenteile b)-e) für $(1 - 3^{1-s})\zeta(s)$ durch.

f) $\zeta(s)$ hat genau einen Pol in $\{s; \mathrm{Re}(s) > 0\}$ und zwar bei $s = 1$.
Hinweis: $\frac{\log 3}{\log 2}$ ist irrational.

Bemerkung: Die Reihendarstellung von $\Psi(s)$ konvergiert genau für $\mathrm{Re}(s) > 0$, was aber nicht ganz so einfach zu zeigen ist. Sie konvergiert genau für $\mathrm{Re}(s) > 1$ absolut.
$\zeta(s)$ lässt sich mit Hilfe einer Funktionalgleichung auf ganz $\mathbb{C}$ meromorph fortsetzen. Sie hat bei $s = 1$ ihren einzigen Pol, der einfach ist. Das Residuum ist 1. Die (noch unbewiesene) RIEMANNsche Vermutung besagt, dass alle nichttrivialen Nullstellen (also nicht die einfachen Nullstellen in $z \in -2\mathbb{N}$) auf der Geraden $\mathrm{Re}(s) = 1/2$ liegen. Bekannt ist (siehe Analytische Zahlentheorie), dass alle sonstigen Nullstellen im Streifen $0 < \mathrm{Re}(s) < 1$ liegen. Zusätzlich bewiesen ist, dass unendlich viele Nullstellen von $\zeta(s)$ auf der Geraden $\mathrm{Re}(s) = \frac{1}{2}$ liegen.