Lehrstuhl A für Mathematik
Prof. Dr. A. Krieg, A. Marschner

Aachen, den 05. Juli 2001

11. Übung zur Analysis IV

Abgabe: Freitag, 13.07.2001, 13.00 Uhr

Aufgabe 1 (6 Punkte):
Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph auf G mit $f(z) \neq 0$ für alle $z \in G$. Man zeige die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

a) $\frac{f'}{f}$ hat eine Stammfunktion auf G.

b) Es existiert ein holomorpher Logarithmus von f auf G.

Aufgabe 2 (2+6+6* Punkte):
Gegeben sei ein komplexes Polynom n-ten Grades

$$p_n(z) = \sum_{k=0}^{n} c_k z^k, \quad n \geq 0.$$

a) Hat f in a eine isolierte Singularität, so hat auch $p_n(f)$ und $\exp(f)$ eine isolierte Singularität in a.

b) Bestimmen Sie, welche Art von Singularität $p_n(f)$ in a besitzt, falls f in a eine

(i) eine hebbare Singularität,
(ii) einen Pol der Ordnung $l \geq 1$,
(iii) eine wesentliche Singularität,

hat.

c*) Bestimmen Sie, welche Art von Singularität $\exp(f)$ in a besitzt, falls f in a eine

(i) eine hebbare Singularität,
(ii) einen Pol der Ordnung $l \geq 1$,
(iii) eine wesentliche Singularität,

hat.

Aufgabe 3 (je 2 Punkte):
Bestimmen Sie die Laurententwicklungen der folgenden Funktionen um die angegebenen Singularitäten. Geben Sie den Konvergenzbereich jeder Reihe an, und entscheiden Sie, um welche Singularitäten es sich handelt:

a) $\frac{e^{2z}}{(z-1)^3}, \quad z = 1,$

b) $\frac{z - \sin z}{z^3}, \quad z = 0,$

c) $\frac{\mathrm{Log}(1+z)}{z}, \quad z = 0.$

Aufgabe 4 (4 Punkte)
Man entwickle die Funktion

$$f(z) = \frac{2}{z^2 - 4z + 3}$$

in eine Laurentreihe um $z = 0$ für

a) $1 < |z| < 3$,

b) $0 < |z| < 1$,

c) $|z| > 3$.

Aufgabe 5* (8* Punkte):
Man überlege sich, ob die folgende Aussage gilt:
Sei $\Gamma = \sum_{j=1}^{r} n_j \gamma_j$ ein Zyklus in einem Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ mit $\gamma_j : [a_j; b_j] \to \mathbb{C}$ stetig diffenrenzierbar. Für ein $z \in G$ gilt dann

$$n_\Gamma = -\sum_{j=1}^{r} n_j \sum_{\substack{t \in [a_j; b_j) \\ \gamma_j(t) \in z + \mathbb{R}_-}} \operatorname{sgn} \operatorname{Im} \gamma_j'(t).$$