Lehrstuhl A für Mathematik
Prof. Dr. A. Krieg, A. Marschner

Aachen, den 28. Juni 2001

10. Übung zur Analysis IV

Abgabe: Freitag, 06.07.2001, 13.00 Uhr

Aufgabe 1 (3+3 Punkte):

a) Sei $K_R(0) \subset U \subset \mathbb{C}$, U offen und $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph mit Ausnahme endlich vieler Punkte $z_1, z_2, ..., z_n \in U$. Liegen diese Punkte innerhalb des geschlossenen Weges $\partial K_R(0) \subset U$, so zeige man, da n disjunkte Kreisscheiben $K_r(z_j)$ existieren mit

$$\int_{\partial K_R(0)} f(z)\,dz = \sum_{j=1}^{n} \int_{\partial K_r(z_j)} f(z)\,dz.$$

b) Man berechne

$$\int_{\partial K_3(0)} \frac{z^2 - z + 3}{(z+2)(z-1)^2}\,dz.$$

Aufgabe 2 (3 Punkte):
Sei $D \subset \mathbb{C}$ offen. Dann besitzt D höchstens abzählbar unendlich viele Wegzusammenhangskomponenten.

Aufgabe 3 (5 Punkte):
Welche der folgenden Gebiete hängen einfach zusammen?

a) $\mathbb{C} \cap \{z \in \mathbb{C}; \mathrm{Re}(z) = 0, |\,\mathrm{Im}(z)| \leq 1\}^C \cap \{z \in \mathbb{C}; \mathrm{Re}(z) > 0, \mathrm{Im}(z) = \sin \frac{1}{\mathrm{Re}(z)}\}^C$,

b) Das Komplement einer logarithmischen Spirale um 0, also

$$\mathbb{C}^* \backslash \{z \in \mathbb{C}; z = e^{t(1+i)} \text{ mit } t \in \mathbb{R}\},$$

c) $\{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\} \cap \{\frac{1}{n}; n \in \mathbb{N}\}^C \backslash \{0\}$.

Aufgabe 4 (6 Punkte)
Man beweise oder widerlege:

a) Sind G, G' zusammenhängende Mengen mit $G \cap G' \neq \emptyset$, dann ist $G \cup G'$ zusammenhängend.

b) Sind G, G' einfach zusammenhängende Mengen mit $G \cap G' \neq \emptyset$, dann ist $G \cup G'$ einfach zusammenhängend.

c) Ist $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge einfach zusammenhängender Mengen mit $G_n \subset G_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, dann ist $\bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$ einfach zusammenhängend.

Aufgabe 5 (KUTTA-JOUKOWSKI-Profil) (5+2*+5+3* Punkte):
Sei

$$f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})$$

die JOUKOWSKI-Abbildung.

a) f ist konform (vgl. Übung 9 Aufgabe 6) für $z \neq \pm 1$ und in $z = \pm 1$ verdoppelt f die Winkel. Zeige hierzu:

Satz: Die holomorphe Funktion f habe in z_0 eine k-fache w_0-Stelle. Sind γ_1, γ_2 stetig differenzierbare Kurven mit $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = w_0$, so gilt

$$\measuredangle(f \circ \gamma_1, f \circ \gamma_2) = k \cdot \measuredangle(\gamma_1, \gamma_2).$$

Dabei definiere man $\measuredangle$ für (nicht notwendigerweise glatte) Wege folgendermaßen:
Sei $\gamma : [0; \varepsilon] \to \mathbb{C}$ ein Weg mit $\gamma(0) = w_0$. Dann hat γ in w_0 eine Tangente, falls $\lim_{t \to 0} \frac{\gamma(t) - w_0}{|\gamma(t) - w_0|} =: a_\gamma \in S^1$ existiert und $s \mapsto w_0 + s a_\gamma$, $s \geq 0$ ist dann die Halbtangente an w_0.

$$\measuredangle(\gamma_1, \gamma_2) := \arg(\frac{a_{\gamma_2}}{a_{\gamma_1}}).$$

Man mache sich klar, dass dieser Begriff den aus Übung 9 verallgemeinert und modulo 2π wohldefiniert ist. Warum genügt dies? Was ist die physikalische Interpretation?

b*) Man zeichne die Stromlinien und Äquipotenziallinien am besten mit dem Computer.

c) Man zeige, dass f folgende Mengen aufeinander abbildet:
Der Kreis $|z| = 1$ geht doppelt auf die Strecke S zwischen ± 1, das Gebiet $|z| > 1$ auf die ganze Ebene ohne den Schlitz S, der Kreis $|12z - 5i| = 13$ auf den Kreisbogenschlitz durch ± 1. (Man zeige, dass dieser Kreis auf einen Kreisbogen abgebildet wird und bestimme ihn, indem man einen weiteren Punkt oder die Kreisgleichung bestimmt.) Zeichnen Sie diese Mengen am besten mit dem Computer.

Hinweis: Man benutze ohne Beweis, dass die Abbildung $g(z) = \frac{z-1}{z+1}$ und deren Umkehrabbildung {Kreise bzw. Geraden in $\mathbb{C} \cup \infty$} auf {Kreise oder Geraden in $\mathbb{C} \cup \infty$} abbildet. Dies wird allgemeiner am Ende des Semesters oder in der Funktionentheorie bewiesen. Nun stelle f mit Hilfe von g dar.

d*) Man zeichne mit dem Computer das so genannte KUTTA-JOUKOWSKI-*Profil*, das das Bild unter f von dem Kreis $|10z + 2 - 5i| = 13$ ist.

W. M. KUTTA und N. J. JOUKOWSKI untersuchten an derartigen Profilen erstmals mathematisch den Auftrieb von Tragflügeln.