Lehrstuhl A für Mathematik
Prof. Dr. A. Krieg, A. Marschner Aachen, den 17. April 2001

# 16. Übung zur Analysis III
# 0. Übung zur Analysis IV

Abgabe: Freitag, den 20.04.2001, 12.00 Uhr

Diese Übung ist klausurrelevant für Analysis IV. Vorgerechnet wird diese Übung in der Übung am 25.04.2001 um 15.45-17.15 Uhr. Weitere Informationen zu Analysis IV stehen auf dem 1. Übungsblatt.

**Aufgabe 1** (5* Punkte)
Die Funktionen $f, g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ seien definiert durch

$$f((x,y,z)^{tr}) := x^2 + xy - y - z, \quad g((x,y,z)^{tr}) := 2x^2 + 3xy - 2y - 3z.$$

Man zeige, dass

$$M := \{(x,y,z)^{tr} \in \mathbb{R}^3; f((x,y,z)^{tr}) = g((x,y,z)^{tr}) = 0\}$$

eine eindimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$ ist und dass

$$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, \quad \varphi(t) := (t, t^2, t^3)^{tr}$$

eine (globale) Parameterdarstellung von $M$ ist.

**Aufgabe 2** (5* Punkte)
Die Funktionen $f_i : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$, $i = 1,2,3$, seien definiert durch

$$\begin{aligned} f_1((x_1,x_2,x_3,x_4)^{tr}) &:= x_1x_3 - x_2^2, \\ f_2((x_1,x_2,x_3,x_4)^{tr}) &:= x_2x_4 - x_3^2, \\ f_3((x_1,x_2,x_3,x_4)^{tr}) &:= x_1x_4 - x_2x_3. \end{aligned}$$

Man zeige, dass

$$M := \{x \in \mathbb{R}^4 \backslash \{0\}; f_1(x) = f_2(x) = f_3(x) = 0\}$$

eine zweidimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^4$ ist.

**Aufgabe 3** (2*+3* Punkte)
Man berechne Maßtensoren und Gramsche Determinanten zu den folgenden Karten.

a) $\varphi : (0;\infty) \to V \subset M \subset \mathbb{R}^2$ mit
$\varphi(t) = (t, e^t)^{tr}, \quad M := \{(x,y)^{tr} \in \mathbb{R}^2;\ e^x - y = 0\}$.

b) $\varphi : \mathbb{R} \times (0;\pi/2) \to V \subset M \subset \mathbb{R}^3$ mit
$\varphi(t_1,t_2) = (t_1, \sin t_2, 2t_1 \sin t_2)^{tr}, \quad M := \{(x,y,z)^{tr} \in \mathbb{R}^3;\ 2xy - z = 0\}$.

**Aufgabe 4** (4* Punkte)
Gegeben sei die Karte

$$\varphi : (r;R) \times (0;H) \to \mathbb{R}^3, \quad 0 < r < R < \infty,\ H > 0,$$

durch

$$\varphi(t_1, t_2) = (t_1 \cos t_2, t_1 \sin t_2, ht_2)^{tr},\ h > 0.$$

Man berechne die Fläche der 2–dimensionalen Wendelfläche, die durch diese Karte beschrieben wird.

**Aufgabe 5** (3* Punkte)
Es sei $A$ die bzgl. der Polarkoordinaten $(t_1, t_2)$ auf der Einheitssphäre $S_2 \subset \mathbb{R}^3$ ( vgl. Beispiel (2.4) für die genauen Definitionen der Polarkoordinaten und der Menge $S_2$) durch die Ungleichungen

$$\varphi_1 \leq t_1 \leq \varphi_2, \quad \theta_1 \leq t_2 \leq \theta_2$$

gegebene Teilmenge $(0 \leq \varphi_1 < \varphi_2 \leq 2\pi, \quad 0 \leq \theta_1 < \theta_2 \leq \pi)$. Man berechne ihre Fläche.

**Aufgabe 6** (5* Punkte)
Man berechne die Fläche des Rotationsellipsoids

$$M := \left\{ (x, y, z)^{tr} \in \mathbb{R}^3; \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{a}\right)^2 + \left(\frac{z}{b}\right)^2 = 1 \right\}, \quad a, b > 0.$$

**Aufgabe 7** (5* Punkte)
Sei $M$ eine $k$–dimensionale Untermannigfaltigkeit und $A \subset M$ eine integrierbare Teilmenge. Sei

$$F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \quad F(x) := Tx + q$$

eine Bewegung ($q \in \mathbb{R}^n$ und $T \in \mathcal{O}(n)$ eine orthogonale Matrix). Man zeige, dass $F(A)$ eine integrierbare Teilmenge der Untermannigfaltigkeit $F(M) \subset \mathbb{R}^n$ ist mit

$$vol_k(F(A)) = vol_k(A).$$